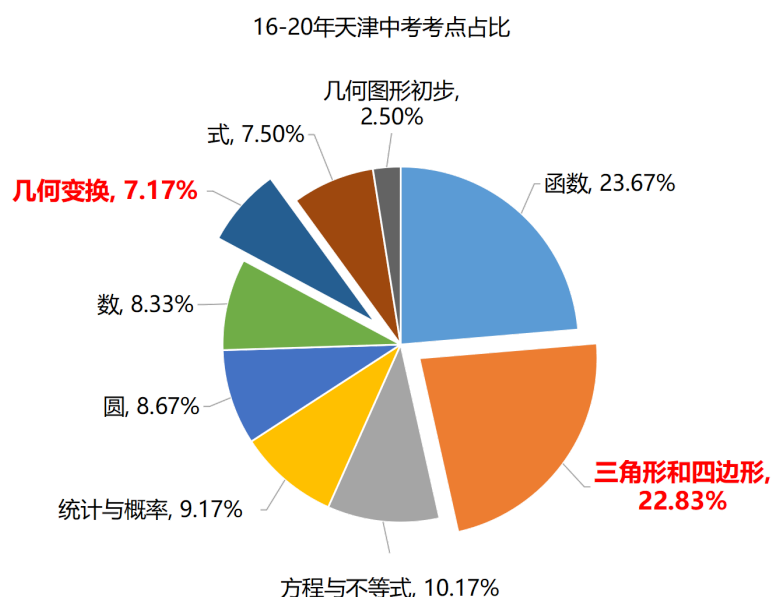


第1讲三角形的常用模型

《三角形与四边形提高》属于整个初中数学几何部分的重要知识，是《三角形基础》《四边形与圆基础》的后续模块，需要学生在掌握三角形、四边形基础性质、判定的前提下，进一步探究三角形常用模型、最值问题等，综合性较强。本模块的内容在中考中常以11题、17题的形式出现，占6分的分值，题目难度较大，需要学生进行系统的学习、归纳、整理，以提高综合运用能力。

本模块侧重于综合题，题目考察知识点较为多样，适用于一轮复习，三角形与四边形专项的短期突破。本模块分为三角形的常用模型，最值问题，面积、线段、角度问题 3 讲内容，配套练习进一步巩固所学内容，专项练习，突破重难点。

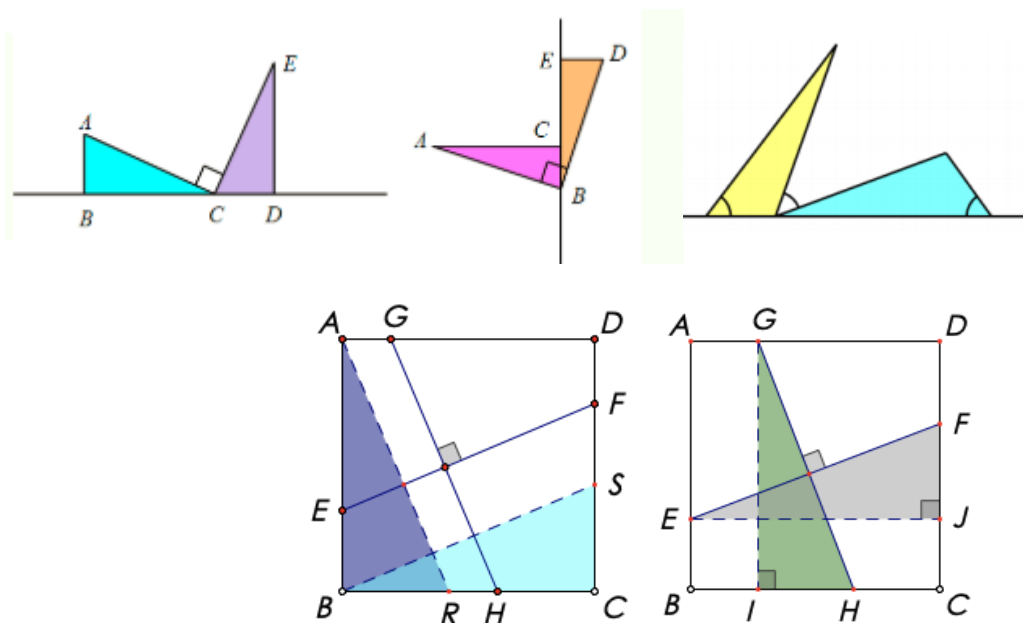
知己知彼



年份	分值	占比	题号
2020年	22	18%	8、11、17、18、24
2019年	19	16%	8、17、18、24
2018年	19	16%	11、17、18、24
2017年	19	16%	11、17、18、24
2016年	19	16%	10、17、18、24

一、全等常见模型

1. 一线三垂直模型

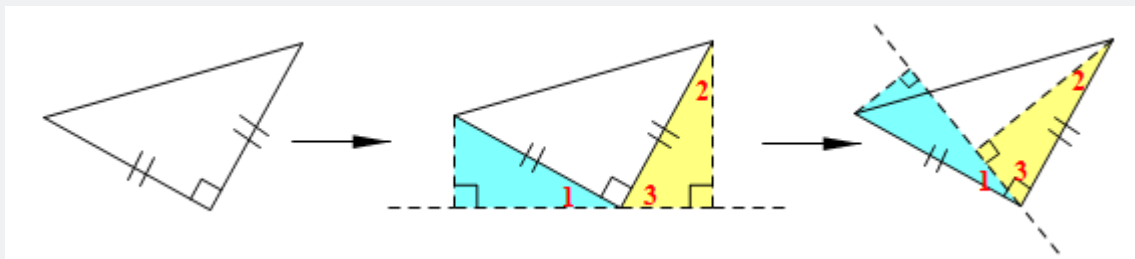


教法备注

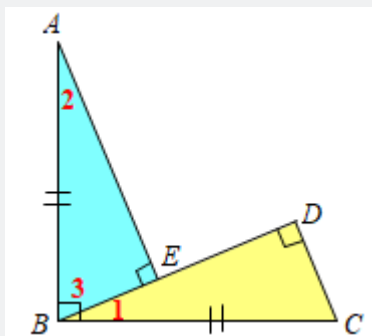
【核心考点】：

只要出现等腰直角三角形，可以过直角点作一条直线，然后过 45° 顶点作该直线的垂线，构造三垂直模型，必有如下全等三角形：

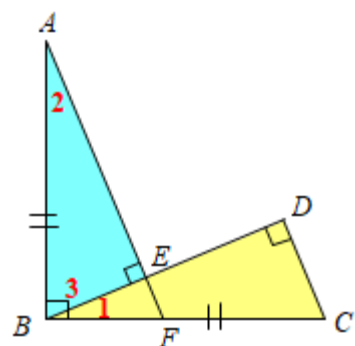
【经典图形】：



【变式图形】：



由 $\triangle ABE \cong \triangle BCD$ 得 $ED = AE - CD$

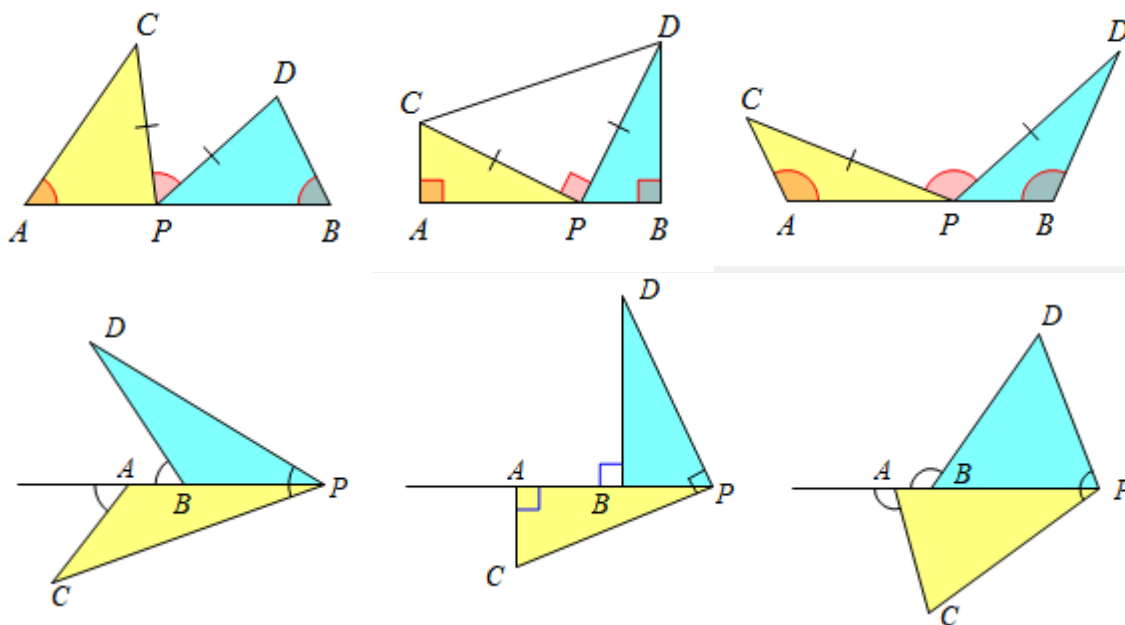


由 $\triangle ABE \cong \triangle BCD$ 得 $CF = AB - CD$

【核心考点】：

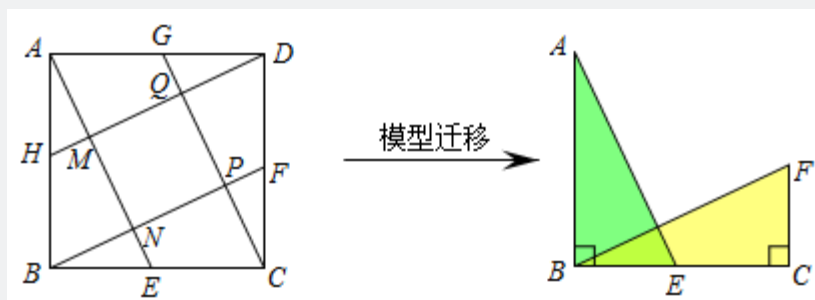
只要在同一条直线上出现三个角相等，一般都可以构造全等三角形解决问题。

【经典图形】：



【拓展】

在正方形 $ABCD$ 中， $AH = BE = CF = DG$ 。

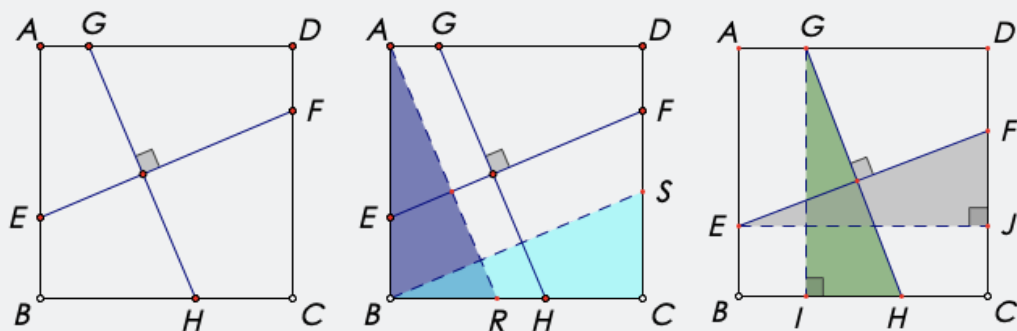


【结论】利用SAS推出 $\triangle DAH \cong \triangle ABE \cong \triangle BCF \cong \triangle CDG$ ，从而推出 $DH = AE = BF = CG$ ， $AE \perp BF$ ，四边形 $MNPQ$ 为正方形。

【注意】本模型与“L”模型有区别，如果“L”模型无法解题，可以考虑构造本模型进行证明计算。

正方形中“十”字：有相等能证垂直，有垂直能证相等。（前提：题干中给出图形）

(1) 正方形 $ABCD$ 中, $EF \perp GH$, 则可证: $EF = GH$



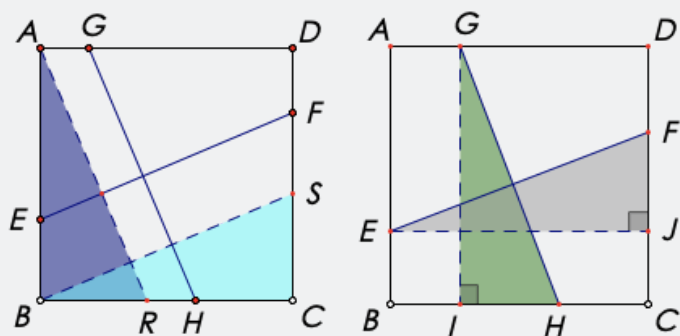
证明方法1:

平移后证 $\triangle ABR \cong \triangle BCS(AAS)$

证明方法2:

作垂证 $\triangle EJF \cong \triangle GIH$

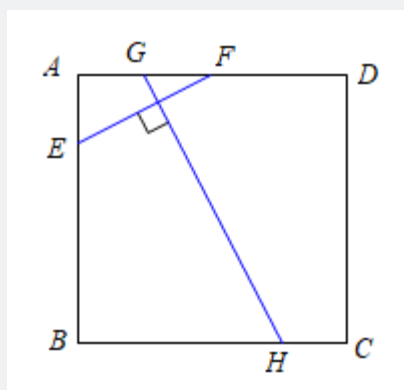
(2) 正方形 $ABCD$ 中, $EF = GH$, 则可证: $EF \perp GH$ (证法同上)



【注意】:

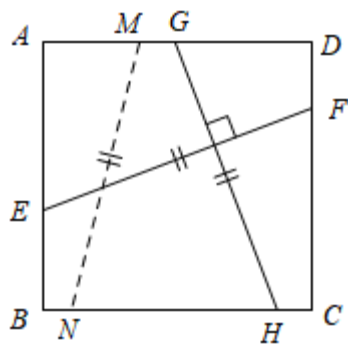
① “十字模型” ——前提条件: 对边取点连线

反例: 如图: 虽然 $EF \perp GH$, 但由于 GH 并不是对边取点所连线段, 所以 EF 并不一定等于 GH



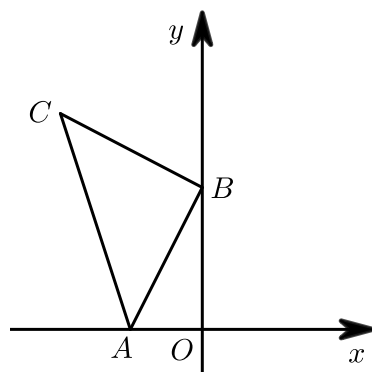
② “十字模型” ——前提条件: 题干给出图形,

才会有已知相等证出垂直, 若没有图形, 不一定垂直, 如下图的 EF 和 MN



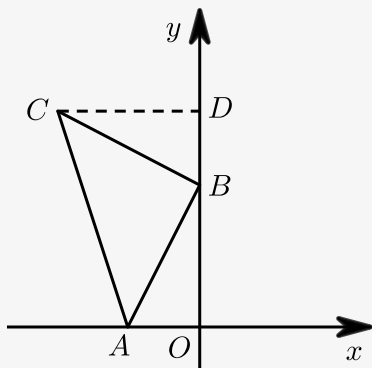
典题精练

1. 如图, $A(m, 0)$, $B(0, n)$, 以 B 点为直角顶点在第二象限作等腰直角 $\triangle ABC$, 则 C 点的坐标为 _____. (用字母 m 、 n 表示)



【答案】 $(-n, n - m)$

【解析】 过点 C 作 $CD \perp y$ 轴于点 D , 如图所示,



$\because \triangle ABC$ 为等腰直角三角形,
 $\therefore \angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC$,
 $\because CD \perp BD$, $BO \perp AO$,
 $\therefore \angle CDB = \angle BOA = 90^\circ$,
 $\therefore \angle CBD + \angle ABO = 90^\circ$, $\angle CBD + \angle BCD = 90^\circ$,
 $\therefore \angle ABO = \angle BCD$,

$$\text{在}\triangle ABO\text{和}\triangle BCD\text{中}, \begin{cases} \angle ABO = \angle BCD \\ \angle BOA = \angle CDB = 90^\circ, \\ AB = BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABO \cong \triangle BCD (\text{AAS}),$$

$$\therefore BD = AO, CD = BO,$$

$$\therefore A(m, 0), B(0, n),$$

$$\therefore BD = -m, CD = n,$$

$$\therefore \text{点} C \text{的坐标为} (-n, n - m),$$

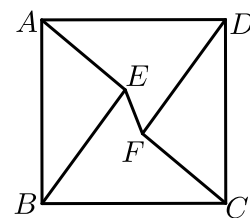
$$\text{故答案为: } (-n, n - m).$$

【标注】【知识点】等腰直角三角形与全等

【重点强调】

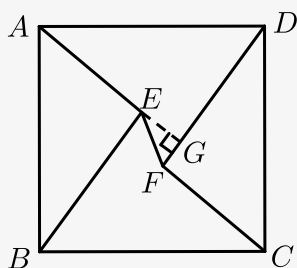
2019~2020学年天津河西区初二上学期期中第15题3分

2. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, $AD = 5$, 点 E, F 是正方形 $ABCD$ 内的两点, 且 $AE = FC = 3$, $BE = DF = 4$, 则 EF 的长为 _____.



【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】延长 AE 交 DF 于点 G ,



$$\therefore ABCD \text{是正方形},$$

$$\therefore AB = AD = 5,$$

$$\angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore AE = FC = 3,$$

$$BE = DF = 4,$$

$$AE^2 + BE^2 = AB^2,$$

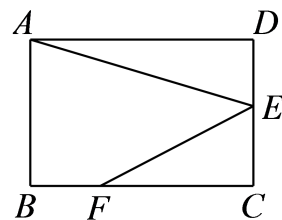
$$\begin{aligned}
& FD^2 + FC^2 = DC^2, \\
& \therefore \triangle ABE \text{ 和 } \triangle CDF \text{ 均为直角三角形}, \\
& \therefore \angle ABE + \angle BAE = 90^\circ, \\
& \angle BAE + \angle DAE = 90^\circ, \\
& \therefore \angle ABE = \angle DAE, \\
& \text{同理 } \angle BAE = \angle ADF, \\
& \therefore \angle AGD = 90^\circ, \\
& \therefore \triangle ABE \cong \triangle DAG, \\
& \therefore AG = BE = 4, \\
& DG = AE = 3, \\
& \therefore EG = AG - AE = 4 - 3 = 1, \\
& FG = DF - DG = 4 - 3 = 1, \\
& \therefore EG = FG, \\
& \therefore \triangle EFG \text{ 为等腰直角三角形}, \\
& \therefore EG^2 + FG^2 = EF^2, \\
& EF = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】正方形与全等综合

【重点强调】

2018年天津和平区初三一模第17题3分

3. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 E 是 CD 的中点，点 F 是 BC 上一点，且 $FC = 2BF$ ，连接 AE ， EF ．
若 $AB = 2$ ， $AD = 3$ ，则 $\tan \angle AEF$ 的值是 _____．



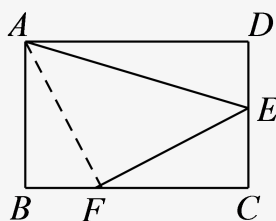
【答案】1

【解析】连接 AF ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形．

$\therefore \angle B = \angle C = 90^\circ$ ， $CD = AB = 2$ ， $BC = AD = 3$ ，

$$\begin{aligned}
&\therefore FC = 2BF, \\
&\therefore BF = 1, FC = 2, \\
&\therefore AB = FC, \\
&\therefore E \text{ 是 } CD \text{ 中点}, \\
&\therefore EC = \frac{1}{2}CD = 1, \\
&\therefore BF = CE,
\end{aligned}$$



$$\text{在 } \triangle ABF \text{ 和 } \triangle FCE \text{ 中}, \begin{cases} AB = FC \\ \angle B = \angle C \\ BF = CE \end{cases}$$

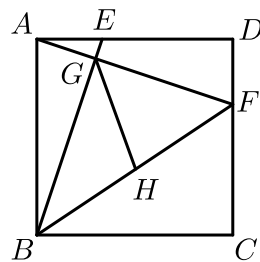
$$\begin{aligned}
&\therefore \triangle ABF \cong \triangle FCE (\text{SAS}), \\
&\therefore \angle BAF = \angle CFE, AF = FE, \\
&\therefore \angle BAF + \angle AFB = 90^\circ, \\
&\therefore \angle CFE + \angle AFB = 90^\circ, \\
&\therefore \angle AFE = 90^\circ, \\
&\therefore \triangle AEF \text{ 是等腰直角三角形}, \\
&\therefore \tan \angle AEF = 1.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】解直角三角形的综合应用

【重点强调】

2018年天津河北区初三二模第17题3分

4. 如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 5，点 E 、 F 分别在 AD 、 DC 上， $AE = DF = 2$ ， BE 与 AF 相交于点 G ，点 H 为 BF 的中点，连接 GH ，则 GH 的长为 _____。



【答案】 $\frac{\sqrt{34}}{2}$

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，
 $\therefore \angle BAE = \angle D = 90^\circ$ ， $AB = AD$ ，
 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DAF$ 中，

$$\begin{aligned} &\because \begin{cases} AB = AD \\ \angle BAE = \angle D, \\ AE = DF \end{cases} \\ &\therefore \triangle ABE \cong \triangle DAF (\text{SAS}), \\ &\therefore \angle ABE = \angle DAF, \\ &\therefore \angle ABE + \angle BEA = 90^\circ, \\ &\therefore \angle DAF + \angle BEA = 90^\circ, \\ &\therefore \angle AGE = \angle BGF = 90^\circ, \\ &\therefore \text{点 } H \text{ 为 } BF \text{ 的中点}, \\ &\therefore GH = \frac{1}{2} BF, \\ &\therefore BC = 5, CF = CD - DF = 5 - 2 = 3, \\ &\therefore BF = \sqrt{BC^2 + CF^2} = \sqrt{34}, \\ &\therefore GH = \frac{1}{2} BF = \frac{\sqrt{34}}{2}. \\ &\text{故答案为: } \frac{\sqrt{34}}{2}. \end{aligned}$$

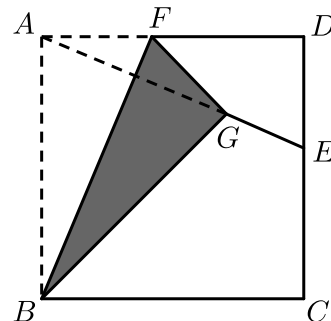
【标注】【知识点】正方形与全等综合

【重点强调】

2019年天津南开区初三二模第17题3分

🔗 经典再现

5. 如图，正方形纸片 $ABCD$ 的边长为 12， E 是边 CD 上一点，连接 AE ，折叠该纸片，使点 A 落在 AE 上的 G 点，并使折痕经过点 B ，得到折痕 BF ，点 F 在 AD 上，若 $DE = 5$ ，则 GE 的长为 _____。



【答案】 $\frac{49}{13}$

【解析】 设 BF 与 AG 交于点 H ，
由折叠性质可知，
 $AG \perp BF$ ，

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle AHF = 90^\circ, \\
&\therefore \angle AFH + \angle FAH = 90^\circ, \\
&\text{又} \because \angle DEA + \angle FAH = 90^\circ, \\
&\therefore \angle AFH = \angle DEA, \\
&\because \text{四边形 } ABCD \text{ 是正方形}, \\
&\therefore AB = CD, \\
&\angle BAF = \angle ADE = 90^\circ, \\
&\therefore \triangle AFB \cong \triangle DEA (\text{AAS}), \\
&\therefore DE = 5, \\
&\therefore AF = DE = 5, \\
&\therefore BF = \sqrt{AB^2 + AF^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13, \\
&\therefore \angle AHF = \angle FAB = 90^\circ, \\
&\angle AFH = \angle AFB, \\
&\therefore \triangle AFH \sim \triangle BFA, \\
&\therefore \frac{AH}{BA} = \frac{AF}{BF}, \\
&\text{即 } \frac{AH}{12} = \frac{5}{13}, \\
&\therefore AH = \frac{60}{13}, \\
&\therefore AG = 2AH = 2 \times \frac{60}{13} = \frac{120}{13}, \\
&\therefore AD = 12, \\
&DE = 5, \\
&\therefore AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13, \\
&\therefore GE = AE - AG = 13 - \frac{120}{13} = \frac{49}{13}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】正方形的性质

【知识点】相似三角形的性质

【知识点】翻折问题与勾股定理

【能力】推理论证能力

【能力】运算能力

【重点强调】

2019年天津中考真题第17题3分

2. 手拉手模型

等边三角形（如图1）

等腰直角三角形（如图2）

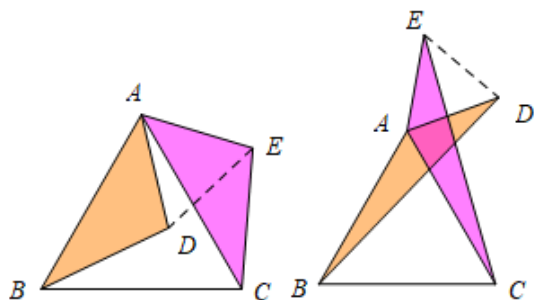


图1

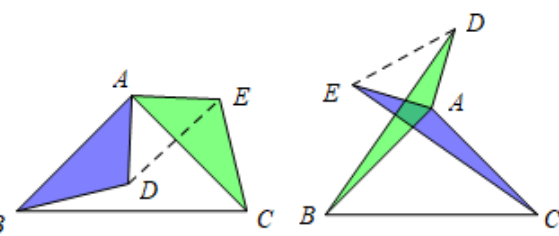
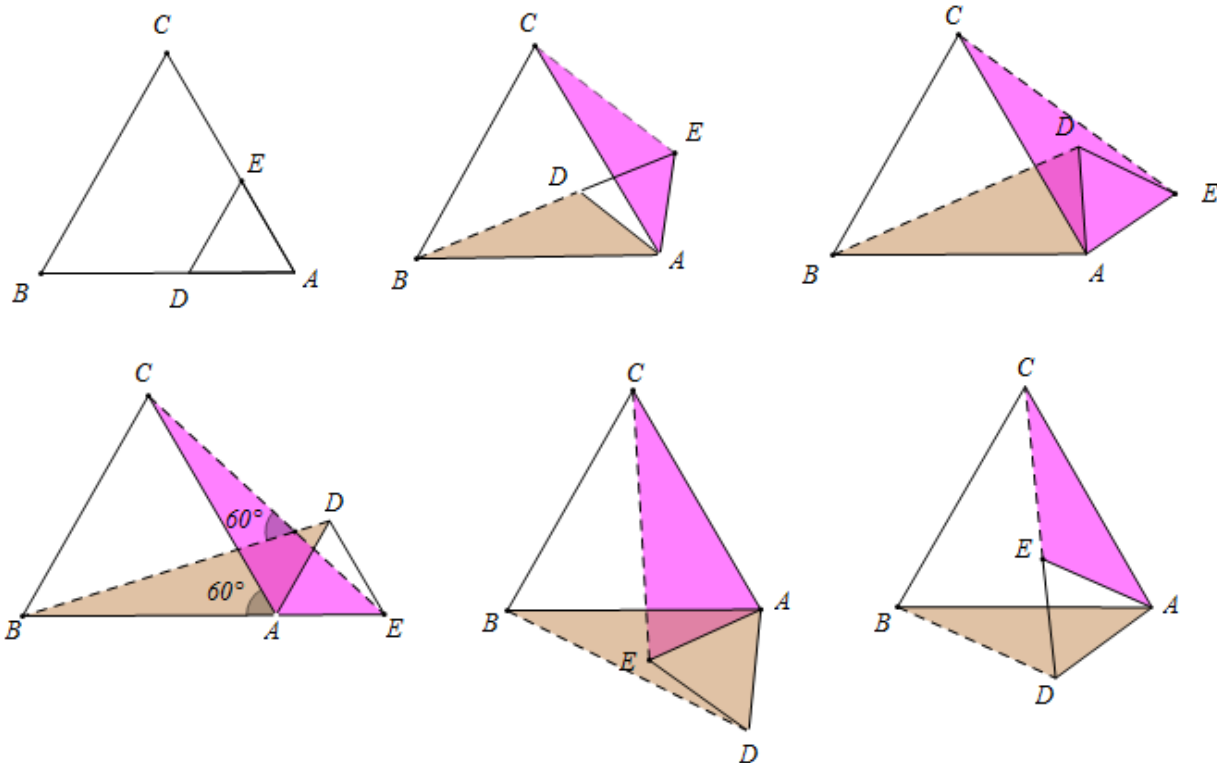


图2

教法备注

已知等边 $\triangle ABC$ ，过 AB 边上的一点 D 作 BC 边的平行线 DE 交 AC 于 E ，将 $\triangle ADE$ 绕点 A 逆时针旋转一周。



依题可知， $\triangle ABC$ 、 $\triangle ADE$ 都是等边三角形，

由 A 点引发了两个共顶点的等边三角形，大手 $AB = AC$ ，小手 $AD = AE$ ，

大手拉小手，通过“SAS”可以证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ 。

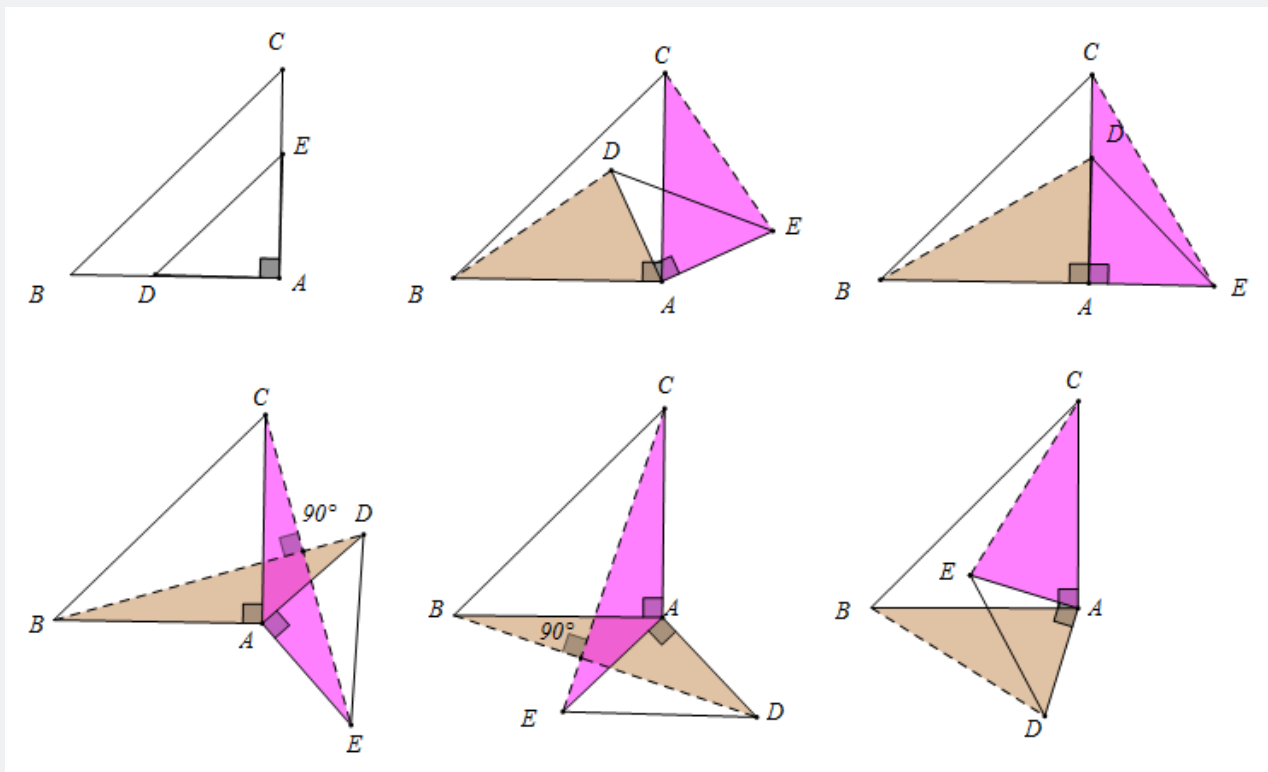
[结论]：

无论旋转多少度， $BD = CE$ ， BD 、 CE 所形成的锐角夹角为 60° 。

求 BD 、 CE 所形成的夹角，是利用“8”字形倒角。

已知等腰直角三角形 $\triangle ABC$ ， $AB = AC$ ，过 AB 边上的一点 D 作 BC 边的平行线 DE 交 AC 于 E ，将

$\triangle ADE$ 绕点A逆时针旋转一周.



依题可知, $\triangle ABC$ 、 $\triangle ADE$ 都是等腰直角三角形,

由A点引发了两个共顶点的等腰直角三角形, 大手 $AB = AC$, 小手 $AD = AE$,

大手拉小手, 通过“SAS”可以证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$.

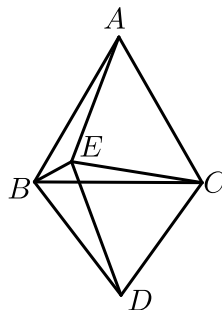
结论:

无论旋转多少度1、 $BD = CE$

2、 BD 、 CE 所形成的夹角为 90° .

典题精练1

6. 如图, 设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 都是等边三角形, 且 $\angle EBD = 62^\circ$, 则 $\angle AEB$ 的度数是 _____.



【答案】 122°

【解析】 $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 是等边三角形,

$\angle EBD = 62^\circ$,

$$\begin{aligned}
&\therefore AC = BC, \\
&CE = CD, \\
&\angle ACB = \angle ECD = 60^\circ, \\
&\text{又} \because \angle ACB = \angle ACE + \angle BCE, \\
&\angle ECD = \angle BCE + \angle BCD, \\
&\therefore \angle BCD = \angle ACE, \\
&\triangle ACE \cong \triangle BCD (\text{SAS}), \\
&\therefore \angle DBC = \angle CAE, \\
&\therefore 62^\circ - \angle EBC = 60^\circ - \angle BAE, \\
&\therefore 62^\circ - (60^\circ - \angle ABE) = 60^\circ - \angle BAE, \\
&\therefore \angle AEB = 180^\circ - (\angle ABE + \angle BAE) \\
&= 180^\circ - 58^\circ = 122^\circ.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】等边三角形的性质

【知识点】全等三角形的对应边与角

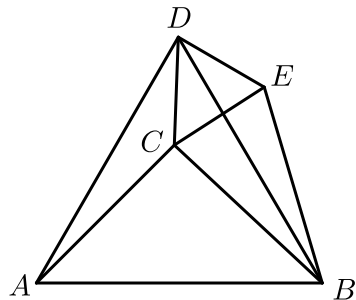
【知识点】ASA

【重点强调】

2017年天津滨海新区初三二模第17题3分

7. 如图， $\triangle ABD$ 和 $\triangle CED$ 均为等边三角形， $AC = BC$ ， $AC \perp BC$ 。若 $BE = \sqrt{2}$ ，则 $CD =$

_____。



【答案】 $\sqrt{3} - 1$

【解析】 $\because CA = CB$ ， $DA = DB$ ，

$\therefore CD$ 均在线段 AB 的垂直平分线上，即 $DF \perp AB$ ，且 $\angle CDB = 30^\circ$ ，

$\therefore BD$ 为等边 $\triangle CDE$ 中， $\angle CDE$ 的角平分线， $\angle CDB = \angle EDB$ 。

在 $\triangle CDB$ 和 $\triangle EDB$ 中，

$$\begin{cases} CD = ED \\ \angle CDB = \angle EDB, \\ DB = DB \end{cases}$$

$\therefore \triangle CDB \cong \triangle EDB (\text{SAS})$,

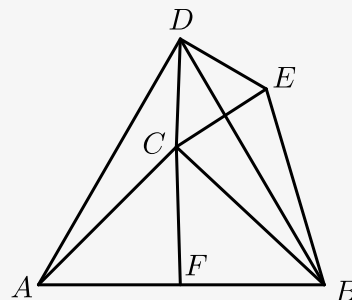
$\therefore BE = BC$.

$\therefore AC = BC = \sqrt{2}$,

$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 2$,

且 $DF = \sqrt{BD^2 - BF^2} = \sqrt{3}$, 且 $CF = BF = 1$,

$\therefore CD$ 的长为 $DF - CF = \sqrt{3} - 1$.

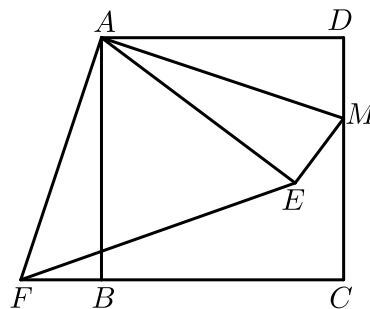


【标注】【知识点】勾股定理的综合应用

【重点强调】

2015年天津塘沽区初三二模第17题3分

8. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， $AB = 3$ ，点 M 在 CD 的边上，且 $DM = 1$ ， $\triangle AEM$ 与 $\triangle ADM$ 关于 AM 所在的直线对称，将 $\triangle ADM$ 按顺时针方向绕点 A 旋转 90° 得到 $\triangle ABF$ ，连接 EF ，则线段 EF 的长为 () .



A. 3

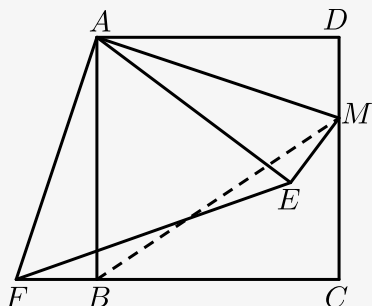
B. $2\sqrt{3}$

C. $\sqrt{13}$

D. $\sqrt{15}$

【答案】 C

【解析】 方法一：如图，连接 BM .



$\therefore \triangle AEM$ 与 $\triangle ADM$ 关于 AM 所在的直线对称，

$\therefore AE = AD$ ， $\angle MAD = \angle MAE$.

$\therefore \triangle ADM$ 按照顺时针方向绕点A旋转 90° 得到 $\triangle ABF$,

$\therefore AF = AM$, $\angle FAB = \angle MAD$.

$\therefore \angle FAB = \angle MAE$

$\therefore \angle FAB + \angle BAE = \angle BAE + \angle MAE$.

$\therefore \angle FAE = \angle MAB$.

$\therefore \triangle FAE \cong \triangle MAB$.

$\therefore EF = BM$.

$\therefore$ 四边形ABCD是正方形,

$\therefore BC = CD = AB = 3$.

$\therefore DM = 1$,

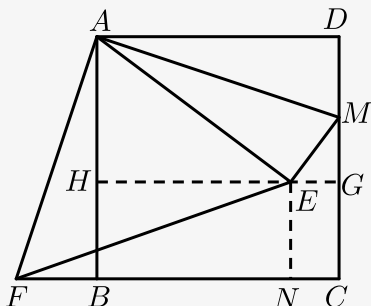
$\therefore CM = 2$.

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle BCM$ 中, $BM = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$,

$\therefore EF = \sqrt{13}$,

故选:C.

方法二:如图,过E作 $HG \parallel AD$,交AB于H,交CD于G,作 $EN \perp BC$ 于N,



则 $\angle AHG = \angle MGE = 90^\circ$,

由折叠可得, $\angle AEM = \angle D = 90^\circ$, $AE = AD = 3$, $DM = EM = 1$,

$\therefore \angle AEH + \angle MEG = \angle EMG + \angle MEG = 90^\circ$,

$\therefore \angle AEH = \angle EMG$,

$\therefore \triangle AEH \sim \triangle EMG$,

$\therefore \frac{EH}{MG} = \frac{AE}{EM} = \frac{1}{3}$,

设 $MG = x$, 则 $EH = 3x$, $DG = 1 + x = AH$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle AEH$ 中, $(1 + x)^2 + (3x)^2 = 3^2$,

解得: $x_1 = \frac{4}{5}$, $x_2 = -1$ (舍去),

$\therefore EH = \frac{12}{5} = BN$, $CG = CM - MG = \frac{6}{5} = EN$,

又 $\because BF = DM = 1$,

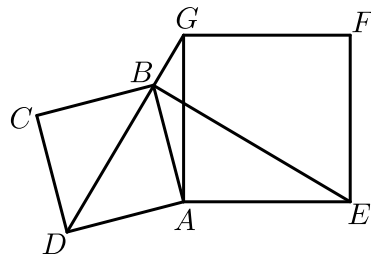
$$\therefore FN = \frac{17}{5},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle AEN \text{ 中, } EF = \sqrt{EN^2 + FN^2} = \sqrt{13},$$

故选：C.

【标注】【知识点】旋转型全等

9. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为2，正方形 $AEFG$ 的边长为 $2\sqrt{2}$ ，点 B 在线段 DG 上，则 BE 的长为 _____ .



【答案】 $\sqrt{2} + \sqrt{6}$

【解析】 $\because \angle DAB = \angle GAE = 90^\circ$,

$$\therefore \angle DAB + \angle 1 = \angle GAE + \angle 1, \text{ 即 } \angle DAG = \angle BAE,$$

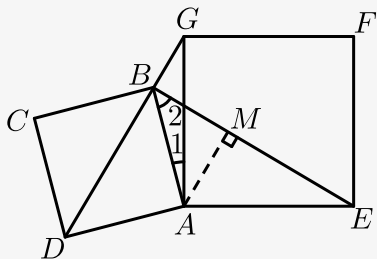
在 $\triangle DAG$ 和 $\triangle BAE$ 中,

$$\begin{cases} AD = AB \\ \angle DAG = \angle BAE, \\ AG = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DAG \cong \triangle BAE (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle 2 = \angle ADB = 45^\circ,$$

如图，作 $AM \perp BE$ 于 M ,



$$\therefore \angle 2 = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle ABM$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore AM = BM = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

$$\therefore AE = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore ME = \sqrt{AE^2 - AM^2} = \sqrt{6},$$

$$\therefore BE = BM + ME = \sqrt{2} + \sqrt{6}.$$

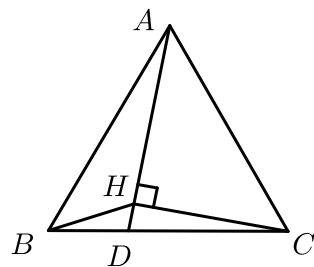
【标注】【知识点】正方形与全等综合

【重点强调】

2019年天津和平区初三一模第17题3分

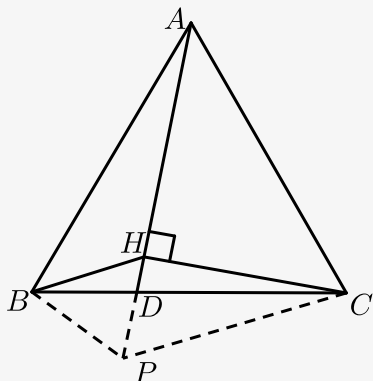
典题精练2

10. 如图, $\triangle ABC$ 是等边三角形, $AB = \sqrt{7}$, 点 D 是边 BC 上一点, 点 H 是线段 AD 上一点, 连接 BH 、 CH , 当 $\angle BHD = 60^\circ$, $\angle AHC = 90^\circ$ 时, $DH = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】 延长 HD 至 P , 使 $HP = HB$,



$\therefore \triangle BHA \cong \triangle BPC$, $\angle BPH = \angle CPH = 60^\circ$,

设 $BH = a = PH = BP$,

$\therefore HC = \sqrt{3}a$, $PC = HA = 2a$,

在 $\triangle AHC$ 中, 由勾股定理得,

$\therefore AC = \sqrt{7}a$,

$\therefore a = 1$,

$\therefore BP = 1$, $CP = 2$, $CH = \sqrt{3}$,

在 $\triangle BPC$ 中角平分线定理,

$\therefore \frac{BP}{PC} = \frac{BD}{CD} = \frac{1}{2}$,

$\therefore CD = \frac{2}{3}\sqrt{7}$,

在 $\triangle DHC$ 中,

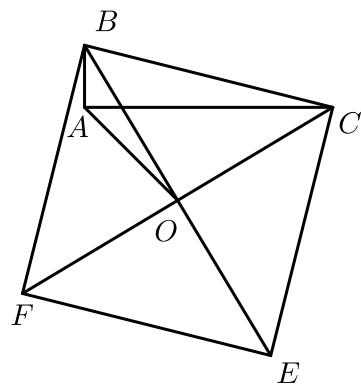
$$\therefore DH = \sqrt{\frac{28}{9} - 3} = \frac{1}{3}.$$

【标注】【知识点】相似与角平分线

【重点强调】

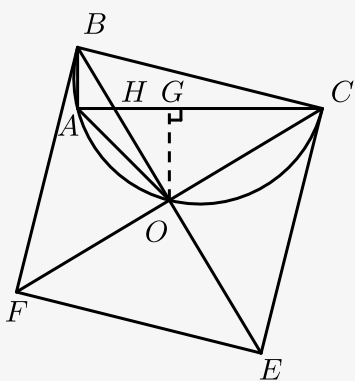
2019年天津和平区初三一模第17题3分

11. 如图, 以 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的斜边 BC 为一边在 $\triangle ABC$ 的同侧作正方形 $BCEF$, 设正方形的中心为 O , 连接 AO , 如果 $AB = 4$, $AO = 6\sqrt{2}$, 那么 AC 的长= _____.



【答案】16

【解析】如图, 过 O 点作 OG 垂直 AC , G 点是垂足.



$$\begin{aligned} \because \angle BAC &= \angle BOC = 90^\circ, \\ \therefore ABCO &\text{四点共圆}, \\ \therefore \angle OAG &= \angle OBC = 45^\circ, \\ \therefore \triangle AGO &\text{是等腰直角三角形}, \\ \therefore 2AG^2 &= 2GO^2 = AO^2 = (6\sqrt{2})^2 = 72, \\ \therefore OG &= AG = 6, \\ \therefore \angle BAH &= \angle OGH = 90^\circ, \end{aligned}$$

$$\angle AHB = \angle OHG,$$

$$\therefore \triangle ABH \sim \triangle GOH,$$

$$\therefore \frac{AB}{OG} = \frac{AH}{AG - AH},$$

$$\because AB = 4, OG = AG = 6,$$

$$\therefore AH = 2.4,$$

在直角 $\triangle OHC$ 中,

$$\therefore HG = AG - AH = 6 - 2.4 = 3.6, OG \text{ 又是斜边 } HC \text{ 上的高},$$

$$\therefore OG^2 = HG \times GC,$$

$$\text{而 } OG = 6, GH = 3.6,$$

$$\therefore GC = 10.$$

$$\therefore AC = AG + GC = 6 + 10 = 16.$$

故 AC 边的长是16.

故答案为: 16.

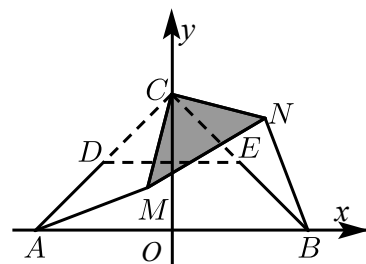
【标注】【知识点】相似8字型

【重点强调】

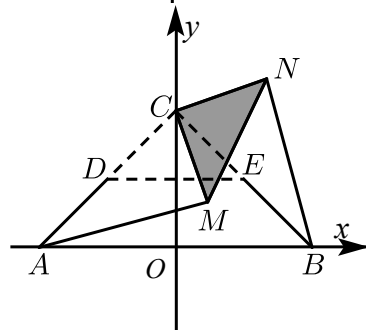
2017年天津和平区初三三模第17题3分

12. 在平面直角坐标系中, 点 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, 2)$, 点 D 、 E 分别是 AC , BC 的中点, 将 $\triangle CDE$ 绕点 C 逆时针旋转得 $\triangle CMN$, 点 M , N 分别是点 D , E 旋转后的对应点, 记旋转角 α .

(1) 如图, 求证 $AM = BN$.



(2) 如图, 当 $\alpha = 75^\circ$ 时, 求点 N 的坐标.



(3) 当 $AM \parallel CN$, 求 BN 的长 (直接写出结果即可).

【答案】(1) 证明见解析.

$$(2) N\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{4+\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$(3) \sqrt{6}.$$

【解析】(1) $\because A(-2, 0), B(2, 0), C(0, 2),$

$$\therefore OA = OB = OC, \text{ 且 } \angle AOC = \angle BOC,$$

$$\therefore \triangle AOC \cong \triangle BOC,$$

$$\therefore AC = BC,$$

$$\because D, E \text{ 分别是 } AC, BC \text{ 的中点},$$

$$\therefore DC = CE,$$

$$\because \triangle MCN \text{ 是 } \triangle DCE \text{ 旋转得到的},$$

$$\therefore \angle ACM = \angle BCN, CM = CD, CE = CN,$$

$$\therefore CM = CN \text{ 且 } \angle ACM = \angle BCN, AC = BC,$$

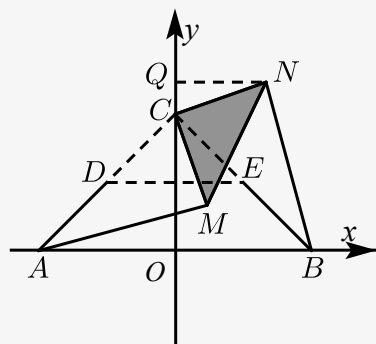
$$\therefore \triangle ACM \cong \triangle BCN,$$

$$\therefore AM = BN.$$

(2) 如图. $\because \angle BCO = 45^\circ, \angle BCN = \angle \alpha = 75^\circ,$

$$\therefore \angle OCN = 120^\circ,$$

过点作 $NQ \perp y$ 轴, Q 为垂足.



$$\therefore \angle NCQ = 60^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BCO \text{ 中}, BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore CE = CN = \sqrt{2},$$

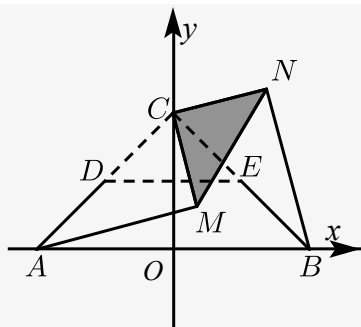
$$\text{在 Rt}\triangle NCQ \text{ 中}, \angle NCQ = 60^\circ, \therefore \angle QNC = 30^\circ,$$

$$\therefore CQ = \frac{1}{2}CN = \frac{\sqrt{2}}{2}, NQ = \sqrt{3}CQ = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore OQ = CO + CQ = \frac{4 + \sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore N\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{4 + \sqrt{2}}{2}\right).$$

(3) 如图,



当 $AM \parallel CN$ 时, $\therefore \angle MCN = \angle AMC = 90^\circ$,
 在 $\text{Rt}\triangle ACM$ 中, $AC = 2\sqrt{2}$, $CM = \sqrt{2}$,
 $\therefore AM = \sqrt{AC^2 - CM^2} = \sqrt{8 - 2} = \sqrt{6}$,
 $\therefore AM = BN$,
 $\therefore BN = \sqrt{6}$.

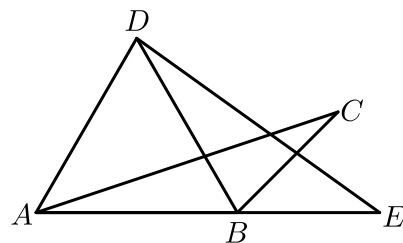
【标注】【知识点】象限内坐标的特征

【重点强调】

2018年天津北辰区初三二模第24题10分

真题再现

13. 如图, 将 $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转 60° 得 $\triangle DBE$, 点 C 的对应点 E 恰好落在 AB 的延长线上, 连接 AD . 下列结论一定正确的是 ().



- A. $\angle ABD = \angle E$ B. $\angle CBE = \angle C$ C. $AD \parallel BC$ D. $AD = BC$

【答案】 C

【解析】 方法一: 由旋转可得 $\triangle ABC \cong \triangle DBE$,
 由于点 E 落在 AB 的延长线上,
 并且旋转了 60° ,
 所以 $\angle ABD = \angle CBE = 60^\circ$,
 所以 $AD \parallel BC$,
 故选 C.

方法二： $\because \triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转 60° 得
 $\triangle DBE$ ，
 $\therefore \angle ABD = \angle CBE = 60^\circ$ ， $AB = BD$ ，
 $\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形，
 $\therefore \angle DAB = 60^\circ$ ，
 $\therefore \angle DAB = \angle CBE$ ，
 $\therefore AD \parallel BC$ ，
 故选C．

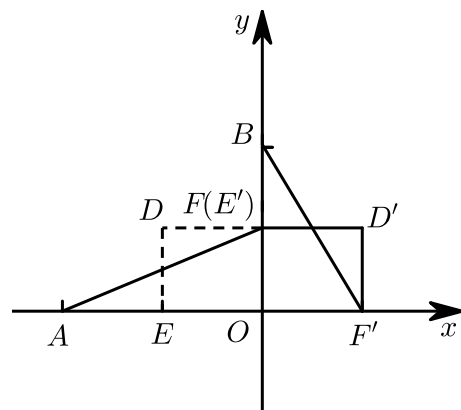
【标注】【知识点】旋转性质综合应用

【重点强调】

2017年天津中考真题第9题3分

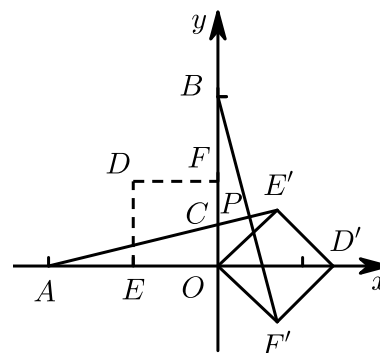
14. 在平面直角坐标系中， O 为原点，点 $A(-2, 0)$ ，点 $B(0, 2)$ ，点 E ，点 F 分别为 OA ， OB 的中点．
 若正方形 $OEDF$ 绕点 O 顺时针旋转，得正方形 $OE'D'F'$ ，记旋转角为 α ．

(1) 如图①，当 $\alpha = 90^\circ$ ，求 AE' ， BF' 的长．



图①

(2) 如图②，当 $\alpha = 135^\circ$ ，求证 $AE' = BF'$ ，且 $AE' \perp BF'$ ．



图②

【答案】 (1) AE' , BF' 的长都等于 $\sqrt{5}$.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) 当 $\alpha = 90^\circ$ 时, 点 E' 与点 F 重合, 如图①.

$\because$ 点 $A(-2, 0)$ 点 $B(0, 2)$,

$\therefore OA = OB = 2$.

$\because$ 点 E , 点 F 分别为 OA , OB 的中点,

$\therefore OE = OF = 1$,

$\because$ 正方形 $OE'D'F'$ 是正方形 $OEDF$ 绕点 O 顺时针旋转 90° 得到的,

$\therefore OE' = OE = 1$, $OF' = OF = 1$.

在 $Rt\triangle AE'O$ 中, $AE' = \sqrt{OA^2 + OE'^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

在 $Rt\triangle BOF'$ 中, $BF' = \sqrt{OB^2 + OF'^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

$\therefore AE'$, BF' 的长都等于 $\sqrt{5}$.

(2) 当 $\alpha = 135^\circ$ 时, 如图②.

$\because$ 正方形 $OE'D'F'$ 是由正方形 $OEDF$ 绕点 O 顺时针旋转 135° 所得,

$\therefore \angle AOE' = \angle BOF' = 135^\circ$.

在 $\triangle AOE'$ 和 $\triangle BOF'$ 中,

$$\begin{cases} AO = BO \\ \angle AOE' = \angle BOF' \\ OE' = OF' \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOE' \cong \triangle BOF'$ (SAS).

$\therefore AE' = BF'$, 且 $\angle OAE' = \angle OBF'$.

$\because \angle ACB = \angle CAO + \angle AOC = \angle CBP + \angle CPB$, $\angle CAO = \angle CBP$,

$\therefore \angle CPB = \angle AOC = 90^\circ$,

$\therefore AE' \perp BF'$.

【标注】【知识点】正方形与全等综合

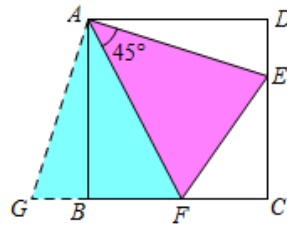
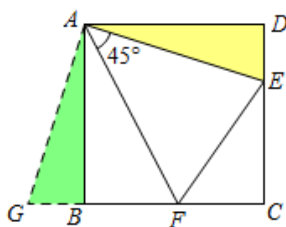
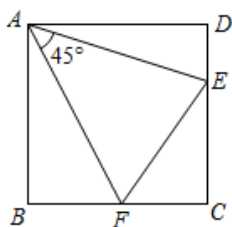
【重点强调】

2014年天津中考真题第24题10分

3. 角含半角模型

🕒 正方形中的角含半角

(1) 半角在倍角内



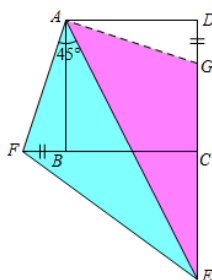
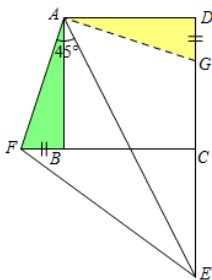
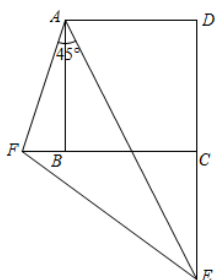
教法备注

【辅助线】延长 BC 至点 G ，使 $BG = DE$ ，连接 AG 。“补短法”

【结论】

- ① 旋转全等： $\triangle ABG \cong \triangle ADE$ ，理由SAS。
- ② 对称全等： $\triangle FAG \cong \triangle FAE$ ，理由SAS。
- ③ $EF = BF + DE$ ，进而推出 $\triangle CEF$ 的周长等于正方形周长的一半。
- ④ AF 平分 $\angle BFE$ ， AE 平分 $\angle DEF$ 。

(2) 半角在倍角外



教法备注

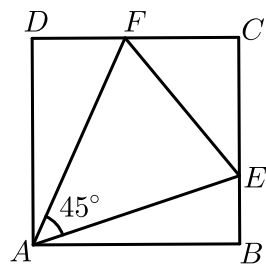
【辅助线】在 CD 截取 $DG = BF$ ，连接 AG 。“截长法”

【结论】

- ① 旋转全等： $\triangle ABF \cong \triangle ADG$ ，理由SAS。
- ② 对称全等： $\triangle EAG \cong \triangle EAF$ ，理由SAS。
- ③ $EF = DE - BF$ 。
- ④ AE 平分 $\angle DEF$ 。

典题精练

15. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， E 、 F 分别是边 BC 、 CD 上的点， $\angle EAF = 45^\circ$ ， $\triangle ECF$ 的周长为4，则正方形 $ABCD$ 的边长为（ ）。



A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】 A

【解析】 将 $\triangle DAF$ 绕点A顺时针旋转90度到 $\triangle BAF'$ 位置，

由题意可得出： $\triangle DAE \cong \triangle BAF'$ ，

$\therefore DF = BF'$ ， $\angle DAF = \angle BAF'$ ，

$\therefore \angle EAF' = 45^\circ$ ，

在 $\triangle FAE$ 和 $\triangle EAF'$ 中，

$$\begin{cases} AF = AF' \\ \angle FAE = \angle EAF' \\ AE = AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle FAE \cong \triangle EAF'$ (SAS)，

$\therefore BF = EF'$ ，

$\therefore \triangle ECF$ 的周长为4，

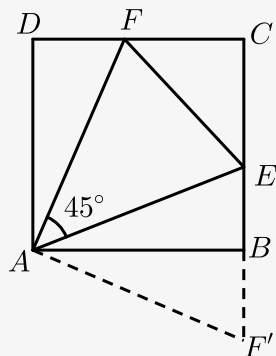
$\therefore EF + EC + FC = FC + CE + EF' = FC + BC + BF'$

$= DF + FC + BC = 4$ ，

$\therefore 2BC = 4$ ，

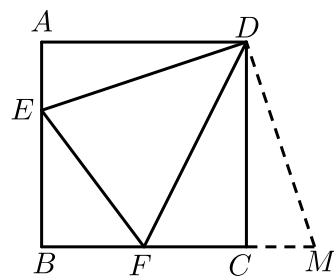
$\therefore BC = 2$ 。

故选：A。



【标注】 【知识点】正方形中的半角模型

如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为3， E ， F 分别是 AB ， BC 边上的点，且 $\angle EDF = 45^\circ$ ．将 $\triangle DAE$ 绕点 D 逆时针旋转 90° ，得到 $\triangle DCM$ ．若 $AE = 1$ ，则 FM 的长为 _____ ．



【答案】 $\frac{5}{2}$

【解析】 $\because \triangle DAE$ 绕点 D 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle DCM$ ，

$$\therefore \angle FCM = \angle FCD + \angle DCM = 180^\circ,$$

$\therefore F$ 、 C 、 M 三点共线，

$$\therefore DE = DM, \angle EDM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EDF + \angle FDM = 90^\circ.$$

$$\because \angle EDF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle FDM = \angle EDF = 45^\circ.$$

又 $\because DF$ 为公共边，

$$\therefore \triangle DEF \cong \triangle DMF,$$

$$\therefore EF = MF.$$

$$\text{设 } EF = MF = x,$$

$$\because AE = CM = 1, \text{ 且 } BC = 3,$$

$$\therefore BM = BC + CM = 3 + 1 = 4,$$

$$\therefore BF = BM - MF = BM - EF = 4 - x,$$

$$\because EB = AB - AE = 3 - 1 = 2.$$

$$\text{在 Rt}\triangle EBF \text{ 中, } EB^2 + BF^2 = EF^2,$$

$$\text{即 } 2^2 + (4 - x)^2 = x^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{5}{2},$$

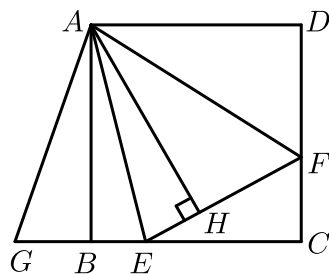
$$\therefore FM = \frac{5}{2}.$$

【标注】【知识点】正方形中的半角模型

【重点强调】

2017年天津西青区初三一模第17题3分

17. 如图，在正方形 $ABCD$ 内作 $\angle EAF = 45^\circ$ ， AE 交 BC 于点 E ， AF 交 CD 于点 F ，连接 EF ，过点 A 作 $AH \perp EF$ ，垂足为 H ，将 $\triangle ADF$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle ABG$ ，若 $BE = 2$ ， $DF = 3$ ，则 AH 的长为 _____ .



【答案】 6

【解析】 由旋转的性质可知： $AF = AG$ ， $\angle DAF = \angle BAG$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore \angle BAD = 90^\circ$.

又 $\because \angle EAF = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle BAE + \angle DAF = 45^\circ$.

$\therefore \angle BAG + \angle BAE = 45^\circ$.

$\therefore \angle GAE = \angle FAE$.

在 $\triangle GAE$ 和 $\triangle FAE$ 中 $\begin{cases} AG = AF \\ \angle GAE = \angle FAE \\ AE = AE \end{cases}$

$\therefore \triangle GAE \cong \triangle FAE$.

$\therefore AB \perp GE$ ， $AH \perp EF$ ，

$\therefore AB = AH$ ， $GE = EF = 5$.

设正方形的边长为 x ，则 $EC = x - 2$ ， $FC = x - 3$.

在 $\text{Rt}\triangle EFC$ 中，由勾股定理得： $EF^2 = FC^2 + EC^2$ ，即 $(x - 2)^2 + (x - 3)^2 = 25$.

解得： $x = 6$.

$\therefore AB = 6$.

$\therefore AH = 6$.

【标注】【知识点】方程思想在勾股定理的应用；正方形中的半角模型

18. 在平面直角坐标系中， O 为原点，边长为2的正方形 $OABC$ 的两顶点 A ， C 分别在 y 轴、 x 轴的正半轴上，现将正方形 $OABC$ 绕点 O 顺时针旋转 .

(1) 如图①，当点 A 的对应点 A' 落在直线 $y = x$ 上时，点 A' 的对应坐标为 _____；点 B 的对应点 B' 的坐标为 _____ .

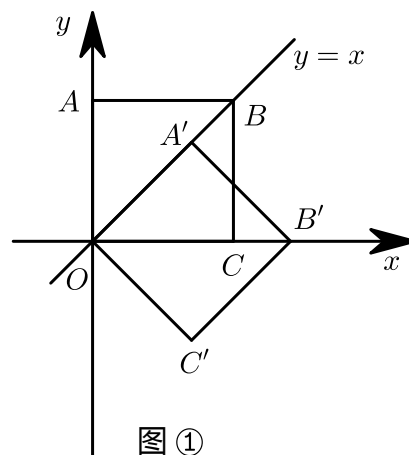


图 ①

(2) 旋转过程中, AB 边交直线 $y = x$ 于点 M , BC 边交 x 轴于点 N , 当 A 点第一次落在直线 $y = x$ 上时, 停止旋转.

① 如图②, 在正方形 $OABC$ 旋转的过程中, 线段 AM , MN , NC 三者满足什么样的数量关系? 请说明理由.

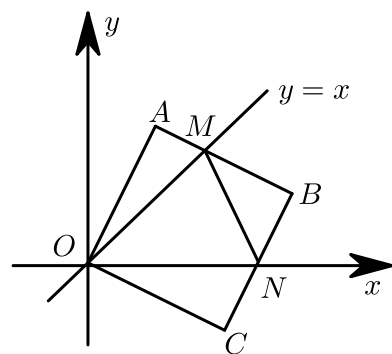


图 ②

② 当 $AC \parallel MN$ 时, 求 $\triangle MBN$ 内切圆的半径 (直接写出结果即可).

【答案】 (1) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$; $(2\sqrt{2}, 0)$

(2) ① $MN = AM + CN$, 证明见解析.

② $6 - 4\sqrt{2}$.

【解析】 (1) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(2\sqrt{2}, 0)$.

(2) ① $MN = AM + CN$,

理由如下: 延长 BA 交 y 轴于点 E ,

在正方形 $OABC$ 中,

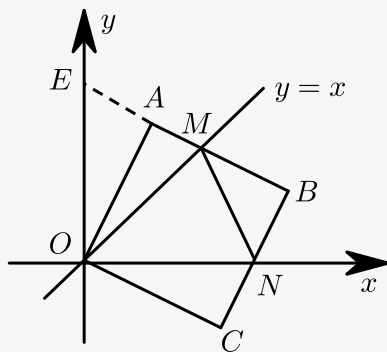
有 $OA = OC$, $\angle C = \angle OAB = \angle AOC = 90^\circ$,

$\therefore \angle EAO = \angle C$,

$\therefore AB$ 边交直线 $y = x$ 于点 M ,

$\therefore \angle EOM = \angle MON = 45^\circ$,

∴



$$\angle AOE + \angle AOM = \angle CON + \angle AOM = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AOE = \angle CON,$$

$$\therefore \triangle OAE \cong \triangle OCN,$$

$$\therefore \angle EOM = \angle MON = 45^\circ, OM = OM,$$

$$\therefore \triangle OME \cong \triangle OMN,$$

$$\therefore MN = ME = AM + CN.$$

② $6 - 4\sqrt{2}$.

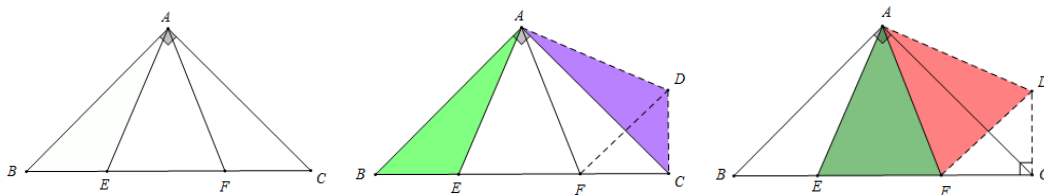
【标注】【知识点】ASA

【重点强调】

2017年天津和平区初三二模第24题10分

💡 等腰直角三角形中的角含半角

(1) 半角在倍角内



💡 教法备注

【思路】过点A作 $AD \perp AE$ ，且 $AD = AE$ ，连接CD、FD.

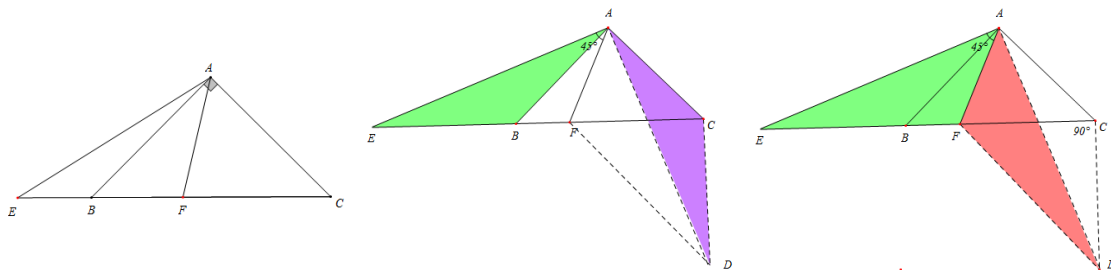
依题可知 $\triangle ABC$ 、 $\triangle AED$ 都是等腰直角三角形，

通过“SAS”可证 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ ， $BE = CD$ ， $BE \perp CD$ ，

【结论】 $\triangle AEF \cong \triangle ADF$ ， $EF = DF$ ，

从而推出 $BE^2 + CF^2 = EF^2$.

(2) 半角在倍角外



教法备注

【思路】 过点A作 $AD \perp AE$ ，且 $AD = AE$ ，连接 CD 、 FD 。

依题可知 $\triangle ABC$ 、 $\triangle AED$ 都是等腰直角三角形，

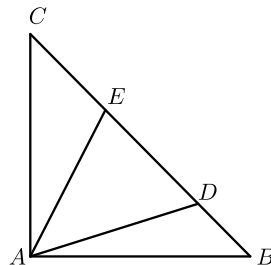
通过“SAS”可证 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ ， $BE = CD$ ， $BE \perp CD$ ，

【结论】 $\triangle AEF \cong \triangle ADF$ ， $EF = DF$ ，

从而推出 $BE^2 + CF^2 = EF^2$ 。

典题精练

19. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AC = AB$ ， $\angle DAE = 45^\circ$ ，且 $BD = 3$ ， $CE = 4$ ，求 $\triangle ADE$ 的面积。



【答案】 15。

【解析】 根据半角模型，可得 $DE^2 = BD^2 + CE^2$ ，

$$\therefore DE = 5, BC = 12,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰直角三角形，

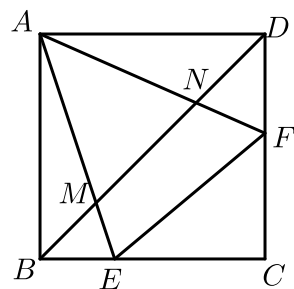
$$\therefore AB = 6\sqrt{2}, S_{\triangle ABC} = 36,$$

$$\text{根据等高模型, } \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{DE}{BC} = \frac{5}{12},$$

$$\therefore S_{\triangle ADE} = 15.$$

【标注】 【知识点】等腰直角三角形中的半角模型

20. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， $\angle EAF = 45^\circ$ ，连接 BD ，分别交 AE 、 AF 于点 M 、 N ；若 $BE = 3$ ， $DF = 4$ ，则 $EF = \underline{\hspace{2cm}}$ ，若 $BM = 2$ ， $DN = 3$ ，则 $MN = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 $7; \sqrt{13}$

【解析】 $BE = 3$ ， $DF = 4$ ，

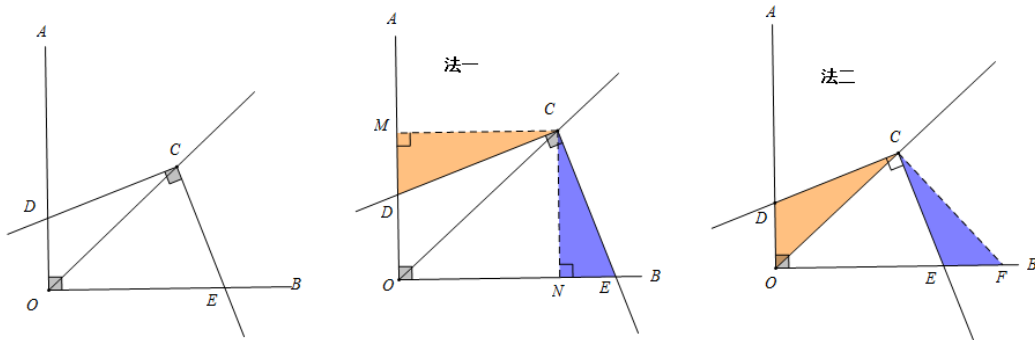
$$EF = BE + DF = 7，$$

$$MN^2 = BM^2 + DN^2 = 13，$$

$$MN = \sqrt{13}。$$

【标注】 【知识点】 正方形中的半角模型；等腰直角三角形中的半角模型

4. 对角互补模型



教法备注

【已知】 $\angle AOB = \angle DCE = 90^\circ$ ， OC 平分 $\angle AOB$ ，
 D 、 E 在 OA 、 OB 上。

【辅助线】 【解题思路】

【法一】 过点 C 作 $CM \perp OD$ 于 M ， $CN \perp OB$ 于 N 。利用角角边证明 $\triangle CMD \cong \triangle CNE$ 。

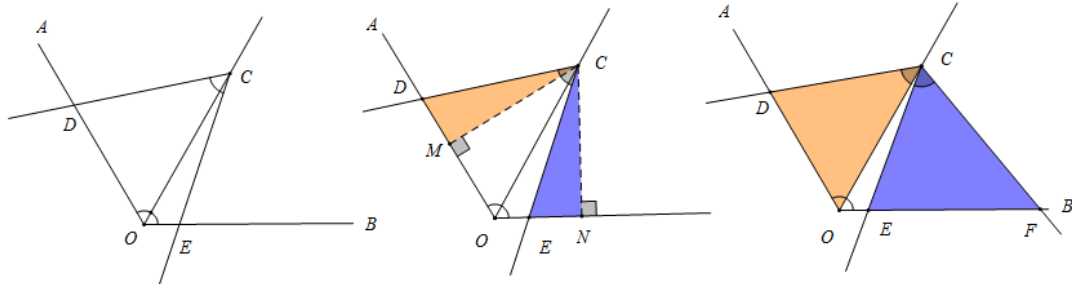
【法二】 将 CD 绕点 C 逆时针旋转 90° 交 OB 于 F ，利用角边角证明 $\triangle CDO \cong \triangle CFE$ 。

【结论】

$$(1) CD = CE;$$

$$(2) OD + OE = OM + ON = \sqrt{2}OC;$$

$$(3) S_{\text{四边形}ODCE} = S_{\triangle OCE} + S_{\triangle OCD} = \frac{1}{2}OC^2.$$



教法备注

已知： $\angle AOB = \alpha$ ， $\angle DCE = 180^\circ - \alpha$ ， OC 平分 $\angle AOB$ ， D 、 E 在 OA 、 OB 上。

【结论】

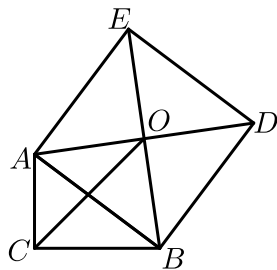
$$(1) CD = CE;$$

$$(2) OD + OE = 2OC \cdot \sin \frac{\alpha}{2};$$

$$(3) S_{\text{四边形}ODCE} = S_{\triangle OCE} + S_{\triangle OCD} = \frac{1}{2}OC^2 \cdot \sin \alpha.$$

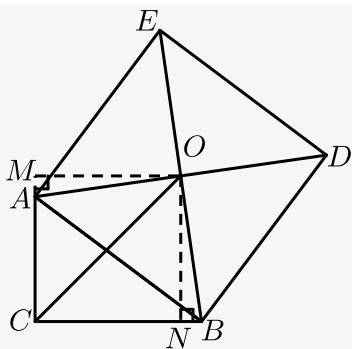
典题精练

21. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，以斜边 AB 为边向外作正方形 $ABDE$ ，且正方形对角线交于点 O ，连接 OC ，已知 $AC = 3$ ， $BC = 4$ ，则 OC 的长为 _____ cm。



【答案】 $\frac{7\sqrt{2}}{2}$

【解析】过 O 作 $OM \perp CA$ 于 M ，作 $ON \perp CB$ 于 N ，



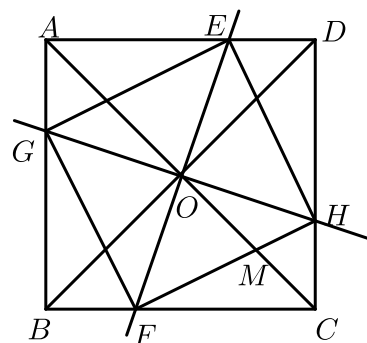
$\therefore \angle OMC = \angle DNC = 90^\circ$,
 又 $\because \angle ACB = 90^\circ$, 则四边形 $MCNO$ 是矩形 ,
 $\therefore \angle MON = 90^\circ$,
 $\because$ 正方形 $ABDE$ 对角线交于 O 点 , $OA = OB$, $\angle AOB = 90^\circ$,
 $\therefore \angle MON - \angle AON = \angle AOB - \angle AON$,
 $\therefore \angle AOM = \angle NOB$,
 $\because \angle OMA = \angle ONB = 90^\circ$,
 $\therefore \triangle AOM \cong \triangle BON (AAS)$,
 $\therefore OM = ON$, $AM = BN$,
 $\because AC = 3$, $BC = 4$, 得 $CN = \frac{AC + BC}{2} = 3.5$,
 $\because \angle OCN = 45^\circ$,
 $\therefore ON = CN = \frac{7}{2}$, 则 $OC = \frac{7}{2}\sqrt{2}$.

【标注】【知识点】正方形与全等综合

【重点强调】

2018年天津东丽区初三一模第17题3分

22. 如图, 已知正方形 $ABCD$, O 为对角线 AC 与 BD 的交点, 过点 O 的直线 EF 与直线 GH 分别交 AD , BC , AB , CD 于点 E , F , G , H . 若 $EF \perp GH$, OC 与 FH 相交于点 M , 当 $CF = 4$, $AG = 2$ 时, 则 OM 的长为 _____ .



【答案】 $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形 ,

$$\therefore \angle OAB = \angle OBC = 45^\circ, OA = OB, AC \perp BD,$$

$$\text{又} \because EF \perp GH,$$

$$\therefore \angle AOB = \angle GOF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB - \angle GOB = \angle GOF - \angle GOB,$$

$$\text{即} \angle AOG = \angle BOF,$$

在 $\triangle AOG$ 与 $\triangle BOF$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle OAB = \angle OBC \\ OA = OB \\ \angle AOG = \angle BOF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AOG \cong \triangle BOF \text{ (ASA)},$$

$$\therefore AG = BF = 2,$$

$$\text{同理可得} CH = BF = 2,$$

$$\text{又} \because CF = 4,$$

$$\therefore BC = BF + CF = 2 + 4 = 6,$$

即正方形 $ABCD$ 的边长为 6 ,

$$\therefore OC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times \sqrt{6^2 + 6^2} = 3\sqrt{2}.$$

在 $\text{Rt}\triangle HCF$ 中 ,

$$FH = \sqrt{CF^2 + CH^2}$$

$$= \sqrt{16 + 4}$$

$$= 2\sqrt{5}.$$

$$\therefore OH = \frac{1}{2}GH = \frac{1}{2} \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{10},$$

$$\therefore \angle OHM = \angle OCH = 45^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle HOM = \angle COH,$$

$$\therefore \triangle MOH \sim \triangle HOC.$$

$$\therefore \frac{OM}{OH} = \frac{OH}{OC},$$

$$\frac{OM}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{3\sqrt{2}},$$

$$OM = \frac{5\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore OM \text{ 的长为 } \frac{5\sqrt{2}}{3}.$$

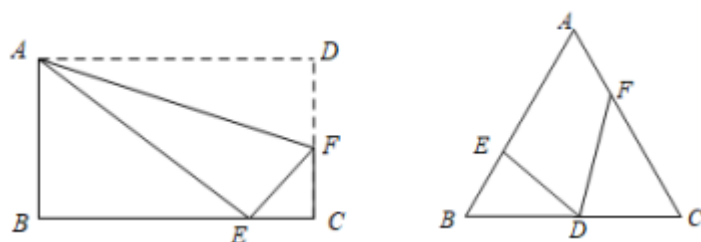
【标注】 【知识点】 正方形与全等综合

【重点强调】

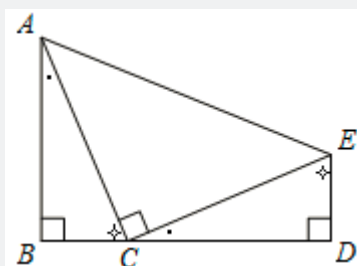
2020年天津河西区初三一模第17题3分

二、相似常见模型

1. 一线三垂直模型

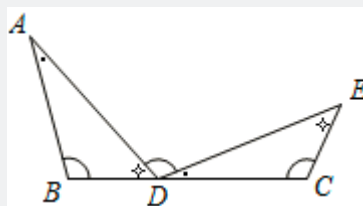


“一线三垂直”相似模型：



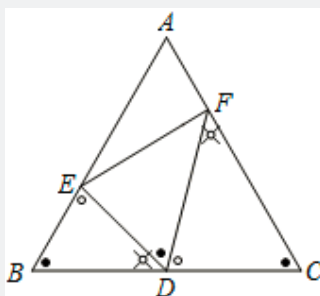
已知 $\angle ABC = \angle ACE = \angle D = 90^\circ$ ，则 $\triangle ABC \sim \triangle CDE$ 。

“一线三等角”相似模型：



如图，已知 $\angle ABC = \angle ADE = \angle C$ ，则 $\triangle ABD \sim \triangle DCE$ 。

以等腰三角形为背景的“一线三等角”相似模型：



(1) 如图，在等腰 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle B = \angle EDF = \angle C$ ，则 $\triangle EBD \sim \triangle DCF$ 。

(2) 特别地, 若点 D 是 BC 的中点, 那么还有 $\triangle EBD \sim \triangle DCF \sim \triangle EDF$.

证明:

当点 D 是 BC 中点时, 已知 $\triangle EBD \sim \triangle DCF$,

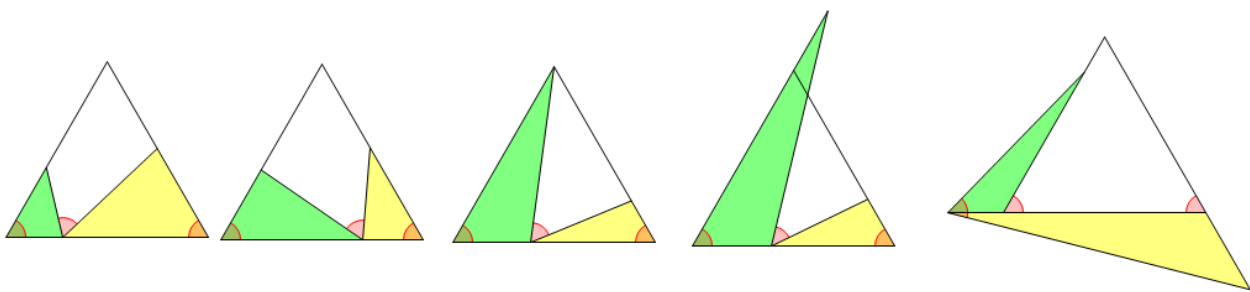
$$\therefore \frac{BE}{CD} = \frac{DE}{FD},$$

又 $\because BD = CD$,

$$\therefore \frac{BE}{BD} = \frac{DE}{DF},$$

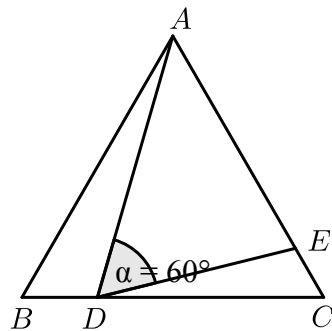
又 $\because \angle B = \angle EDF$, 可得 $\triangle EBD \sim \triangle EDF$.

【经典图形】



典题精练

23. 如图, $\triangle ABC$ 是等边三角形, 点 D 、 E 分别在 BC 、 AC 上, 且 $\angle ADE = 60^\circ$, 若 $\triangle ABC$ 的边长为6, $CD = 2BD$, 则 AD 的长为 _____.



【答案】 $2\sqrt{7}$

【解析】 $\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle B = \angle C = \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle B + \angle BAD, \angle ADE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CDE,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle DCE,$$

$$\therefore \frac{AB}{DC} = \frac{BD}{CE},$$

$$\therefore AB = BC = CA = 6, CD = 2BD$$

$$\begin{aligned}
&\therefore BD = 2, CD = 4, \\
&\therefore \frac{6}{4} = \frac{2}{CE}, \\
&\therefore CE = \frac{4}{3}, \\
&\therefore AE = 6 - \frac{4}{3} = \frac{14}{3}, \\
&\therefore \triangle ADC \sim \triangle AED, \\
&\therefore \frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AC}, \\
&\therefore AD^2 = AE \times AC = \frac{14}{3} \times 6 = 28, \\
&\therefore AD = 2\sqrt{7}.
\end{aligned}$$

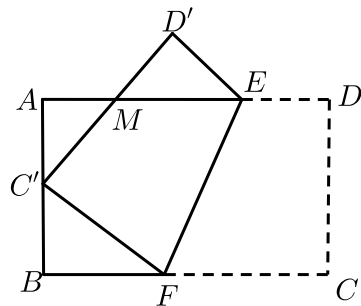
故答案为： $2\sqrt{7}$ 。

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

【重点强调】

2014年天津南开区初三二模第17题3分

24. 如图，将矩形 $ABCD$ 沿 EF 折叠，使顶点 C 恰好落在 AB 边的中点 C' 上，点 D 落在 D' 处， $C'D'$ 交 AE 于点 M 。若 $AB = 6$ ， $BC = 9$ ，则 AM 的长为 _____。



【答案】 $\frac{9}{4}$

【解析】根据折叠的性质可知， $FC = FC'$ ， $\angle C = \angle FC'M = 90^\circ$ ，

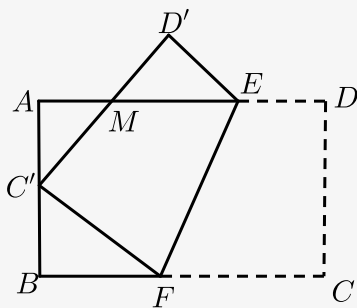
设 $BF = x$ ，则 $FC = FC' = 9 - x$ ，

$$\therefore BF^2 + BC'^2 = FC'^2,$$

$$\therefore x^2 + 3^2 = (9 - x)^2, \text{ 解得：} x = 4,$$

$$\therefore \angle FC'M = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AC'M + \angle BC'F = 90^\circ,$$



$$\text{又} \because \angle BFC' + \angle BC'F = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AC'M = \angle BFC',$$

$$\because \angle A = \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AMC' \sim \triangle BFC',$$

$$\therefore \frac{AC'}{BF} = \frac{AM}{BC'},$$

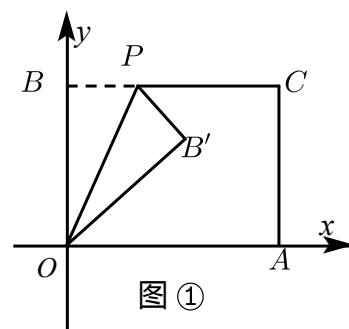
$$\therefore BC' = AC' = 3,$$

$$\therefore AM = \frac{9}{4}.$$

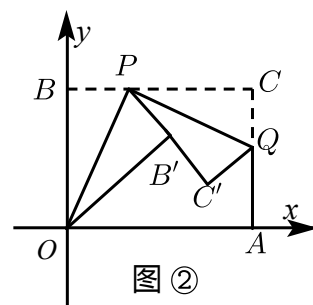
【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

25. 已知一个矩形纸片 $OACB$ ，将该纸片放置在平面直角坐标系中，点 $A(11, 0)$ ，点 $B(0, 6)$ ，点 P 为 BC 边上的动点（点 P 不与点 B 、 C 重合），经过点 O 、 P 折叠该纸片，得点 B' 和折痕 OP 。设 $BP = t$ 。

(1) 如图①，当 $\angle BOP = 30^\circ$ 时，求点 P 的坐标。



(2) 如图②，经过点 P 再次折叠纸片，使点 C 落在直线 PB' 上，得点 C' 和折痕 PQ ，若 $AQ = m$ ，试用含有 t 的式子表示 m 。



(3) 在(2)的条件下, 当点 C' 恰好落在边 OA 上时, 求点 P 的坐标(直接写出结果即可)。

【答案】 (1) $(2\sqrt{3}, 6)$ 。

$$(2) m = \frac{1}{6}t^2 - \frac{11}{6}t + 6 \quad (0 < t < 11)。$$

$$(3) \left(\frac{11 - \sqrt{13}}{3}, 6\right) \text{ 或 } \left(\frac{11 + \sqrt{13}}{3}, 6\right)$$

【解析】 (1) 根据题意, $\angle OBP = 90^\circ$, $OB = 6$,

在 $\text{Rt}\triangle OBP$ 中, 由 $\angle BOP = 30^\circ$, $BP = t$, 得 $OP = 2t$ 。

根据勾股定理, $OP^2 = OB^2 + BP^2$,

即 $(2t)^2 = 6^2 + t^2$, 解得 $t = 2\sqrt{3}$ ($t = -2\sqrt{3}$ 舍去)。

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(2\sqrt{3}, 6)$ 。

(2) $\because \triangle OB'P$ 、 $\triangle QC'P$ 分别是由 $\triangle OBP$ 、 $\triangle QCP$ 折叠得到的,

有 $\triangle OB'P \cong \triangle OBP$, $\triangle QC'P \cong \triangle QCP$ 。

$\therefore \angle OPB' = \angle OPB$, $\angle QPC' = \angle QPC$ 。

$\because \angle OPB' + \angle OPB + \angle QPC' + \angle QPC = 180^\circ$,

$\therefore \angle OPB + \angle QPC = 90^\circ$ 。

$\because \angle BOP + \angle OPB = 90^\circ$,

$\therefore \angle BOP = \angle CPQ$ 。

又 $\angle OBP = \angle C = 90^\circ$,

$\therefore \triangle OBP \sim \triangle PCQ$, 有 $\frac{OB}{PC} = \frac{BP}{CQ}$ 。

由题设 $BP = t$, $AQ = m$, $BC = 11$, $AC = 6$, 则 $PC = 11 - t$,

$CQ = 6 - m$ 。

$$\therefore \frac{6}{11 - t} = \frac{t}{6 - m}。$$

$$\therefore m = \frac{1}{6}t^2 - \frac{11}{6}t + 6 \quad (0 < t < 11) \text{ 即为所求}。$$

(3) 由题得 $BP = B'P = t$, $CP = C'P = 11 - t$ 。

$\because$ 矩形 $APBC$ 中, $BC \parallel AO$ 。

$\therefore \angle BPO = \angle C'OP$ 。

又 $\because \angle BPO = \angle B'PO$ 。

$\therefore \angle C'OP = \angle C'PO$ 。

$\therefore OC' = C'P = 11 - t$ 。

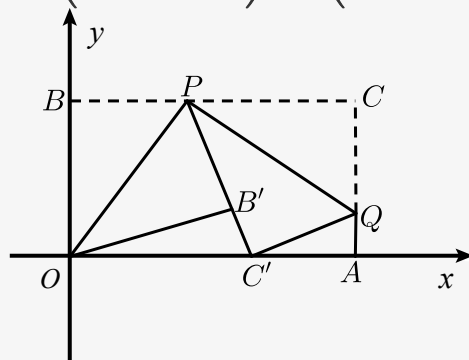
则 $\text{Rt}\triangle DB'C'$ 中, $OB' = OB = 6$, $OC' = 11 - t$,

$B'C' = PC' - PB' = 11 - 2t$ 。

$$OB'^2 + B'C'^2 = OC'^2。$$

$$\text{解得 } t_1 = \frac{11 - \sqrt{13}}{3}, t_2 = \frac{11 + \sqrt{13}}{3}.$$

$$\therefore P\left(\frac{11 - \sqrt{13}}{3}, 6\right) \text{ 或 } P\left(\frac{11 + \sqrt{13}}{3}, 6\right).$$



【标注】【能力】运算能力

【能力】推理论证能力

【知识点】方程思想在勾股定理的应用

【知识点】勾股定理

【知识点】相似三角形的判定-两角对应相等

【知识点】相似三角形的性质与判定综合

【知识点】相似三角形的性质

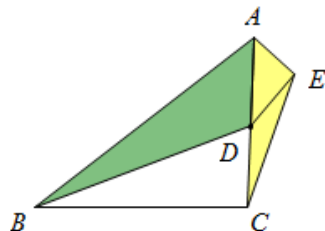
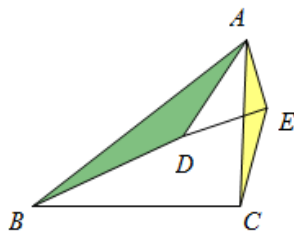
【知识点】全等三角形的对应边与角

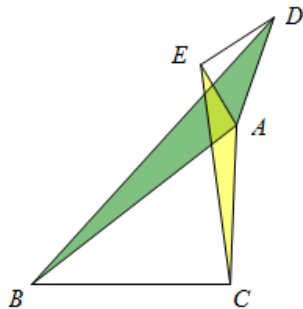
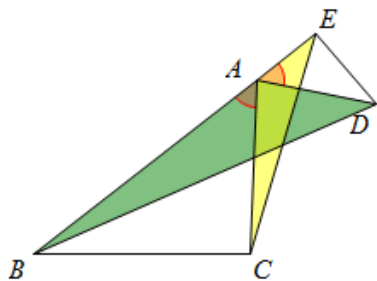
【知识点】矩形的性质

【重点强调】

2012年天津中考真题第25题

2. 手拉手模型





教法备注

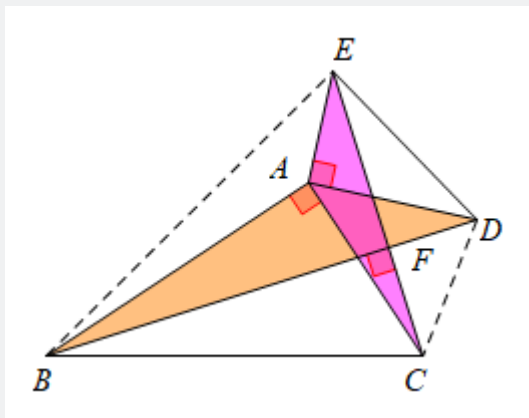
全等是相似比为1的相似，手拉手全等模型中的重要特征是等腰三角形，如果将等腰三角形换做任意三角形，就是手拉手相似。

【结论】

① $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ 、 $\frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$ ；

② BD 与 CE 所成夹角有一角等于 $\angle BAC$ 。

在手拉手相似中当 $\angle BAC = 90^\circ$ 时有：



① $BD \perp CE$ ；

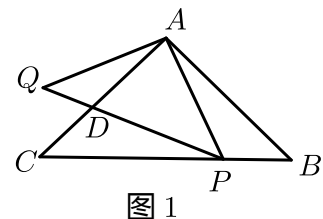
② $CD^2 + BE^2 = BC^2 + DE^2$ ；

③ $S_{BCDE} = \frac{1}{2} BD \cdot CE$ 。

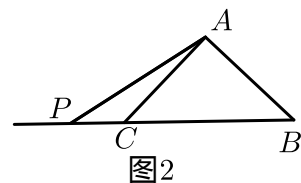
典题精练

26. 如图，在等腰直角三角形 ABC 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC = \sqrt{2}$ ， P 为射线 BC 上一动点。连接 AP ，将线段 AP 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到线段 AQ ，射线 QP 交射线 AC 于点 D 。

(1) 如图1，当 P 在线段 BC 上时，若 $\angle BAP = 22.5^\circ$ ，则 $\angle CPD = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ ，并证明： $\triangle ABP \cong \triangle PCD$ 。



(2) 如图2, 若P在BC延长线上, 请补全图形, 并证明: $\triangle ABP \sim \triangle PCD$.



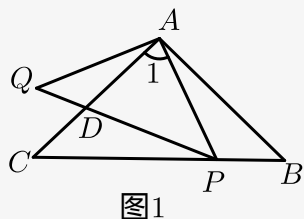
(3) 若 $CD = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 请直接写出此时BP的长为: _____.

【答案】(1) 22.5, 证明见解析.

(2) 证明见解析.

(3) $\frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$ 或 $\frac{3 + \sqrt{15}}{3}$

【解析】(1)



$$\because \angle BAC = 90^\circ, AB = AC,$$

$$\therefore \angle B = \angle C = 45^\circ,$$

$$\because \angle 1 = 90^\circ - 22.5^\circ = 67.5^\circ, \angle APC = 45^\circ + 22.5^\circ = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle APC,$$

$$\therefore PC = AC,$$

$$\therefore PC = AB,$$

由旋转的性质得, $AP = AQ, \angle PAQ = 90^\circ,$

$$\therefore \angle APQ = \angle Q = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CPD = \angle APC - \angle APQ = 67.5^\circ - 45^\circ = 22.5^\circ,$$

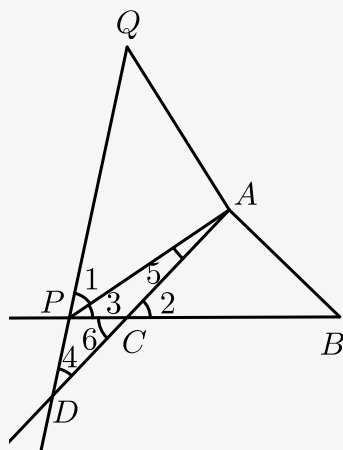
$$\therefore \angle CPD = \angle BAP,$$

在 $\triangle PCD$ 和 $\triangle ABP$ 中,

$$\because \begin{cases} \angle C = \angle B \\ CP = BA \\ \angle CPD = \angle BAP \end{cases},$$

$$\triangle PCD \cong \triangle ABP.$$

(2) 补全图形如图 ,



证明 : $\because \angle 1 = \angle 4 + \angle 5 = 45^\circ$,

$\angle 2 = \angle 3 + \angle 5 = 45^\circ$,

$\therefore \angle 4 = \angle 3$.

$\because \angle 6 = \angle 2$,

又 $\angle 2 = \angle B$,

$\therefore \angle 6 = \angle B$.

在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle PCD$ 中 ,

$\because \angle 4 = \angle 3$, $\angle 6 = \angle B$,

$\therefore \triangle ABP \sim \triangle PCD$.

(3) ① 若 P 在 BC 的延长线上 ,

$\because \triangle ABP \sim \triangle PCD$,

$\therefore \frac{CD}{BP} = \frac{PC}{AB}$.

$\because AB = AC = \sqrt{2}$,

$\therefore BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = 2$.

$\because CD = \frac{\sqrt{2}}{3}$,

$\therefore \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{BP} = \frac{BP - BC}{\sqrt{2}}$.

$\therefore 3BP^2 - 6BP - 2 = 0$.

$\therefore BP_1 = \frac{3 + \sqrt{15}}{3}$, $BP_2 = \frac{3 - \sqrt{15}}{3}$ (舍) .

② 若 P 在线段 BC 上 ,

$\because \triangle DCP \sim \triangle PBA$,

$\therefore \frac{CD}{PB} = \frac{CP}{BA}$,

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{BP} &= \frac{2-BP}{\sqrt{2}}, \\ \text{即 } 3BP^2 - 6BP + 2 &= 0, \\ \text{解得 } BP_1 &= \frac{3+\sqrt{3}}{3}, BP_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{3}, \\ \therefore BP \text{ 的长为 } &\frac{3\pm\sqrt{3}}{3} \text{ 或 } \frac{3+\sqrt{15}}{3}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

过关斩将

27. 如图1, 已知矩形 $ABCD$ 中, $AB = \frac{4}{3}BC$, E 、 F 分别 AB 、 BC 的中点, 分别过点 E 、 F 作 AB 、 BC 的垂线相交于点 O , 得矩形 $BEOF$.

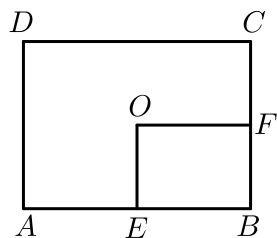


图1

- (1) 线段 AE 与 CF 的数量关系是_____, 直线 AE 与 CF 的位置关系是_____.
- (2) 固定矩形 $ABCD$, 将矩形 $BEOF$ 绕点 B 顺时针旋转到如图2的位置, 连接 AE 、 CF , 那么(1)中的结论是否依然成立? 请说明理由.

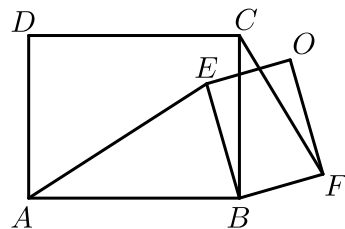


图2

- (3) 若 $AB = 8$, 当矩形 $BEOF$ 旋转至点 O 在 CF 上时(如图3), 设 OE 与 BC 交于点 P , 求 PC 的长.

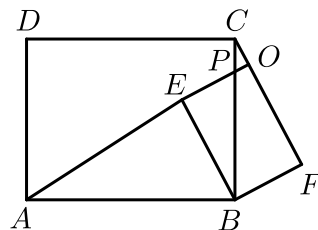


图3

【答案】(1) $AE = \frac{4}{3}CF$; $AE \perp CF$.

(2) $AE \perp CF$, 且 $AE = \frac{4}{3}CF$.

(3) $PC = \frac{18 - 8\sqrt{3}}{3}$.

【解析】(1) $\because O$ 是矩形 $ABCD$ 的中心, $OE \perp AB$ 于 E , $OF \perp BC$ 于 F ,

$$\therefore AE = \frac{1}{2}AB, CF = \frac{1}{2}BC,$$

$$\because AB = \frac{4}{3}BC,$$

$$\therefore \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}BC, \text{ 即 } AE = \frac{4}{3}CF;$$

$\because AB \perp BC$, 点 E 、 F 分别是 AB 、 BC 上的点,

$$\therefore AE \perp CF.$$

(2) (1) 中的结论仍然成立.

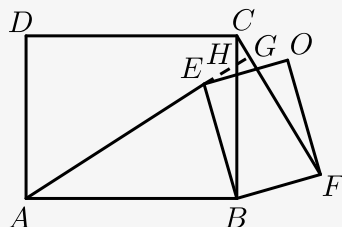


图2

如图, 延长 AE 交 BC 于 H , 交 CF 于 G ,

$$\text{由已知得 } BE = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore \frac{BE}{AB} = \frac{BF}{BC} = \frac{1}{2},$$

$$\because \angle ABC = \angle EBF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle CBF,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle CBF,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle BCF, \frac{AE}{CF} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{3},$$

$$\because \angle BAE + \angle AHB = 90^\circ, \angle AHB = \angle CHG,$$

$$\therefore \angle BCF + \angle CHG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CGH = 180^\circ - (\angle BCF + \angle CHG) = 90^\circ,$$

$$\therefore AE \perp CF, \text{ 且 } AE = \frac{4}{3}CF.$$

(3) $\because AB = \frac{4}{3}BC$, $AB = 8$,

$$\therefore BC = 6,$$

$$\therefore BE = OF = 4, BF = OE = 3,$$

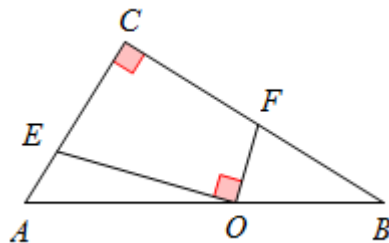
$\because$ 点 O 在 CF 上,

$$\therefore \angle CFB = 90^\circ,$$

$$\begin{aligned}
\therefore CF &= \sqrt{BC^2 - BF^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}, \\
\therefore OC &= CF - OF = 3\sqrt{3} - 4, \\
\therefore \angle CPO &= \angle BPE, \angle PEB = \angle POC = 90^\circ, \\
\therefore \triangle BPE &\sim \triangle CPO, \\
\therefore \frac{CP}{BP} &= \frac{OC}{BE}, \\
\text{设 } CP &= x, \text{ 则 } BP = 6 - x, \\
\therefore \frac{x}{6 - x} &= \frac{3\sqrt{3} - 4}{4}, \\
\text{解得: } x &= \frac{18 - 8\sqrt{3}}{3}, \\
\therefore PC &= \frac{18 - 8\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}$$

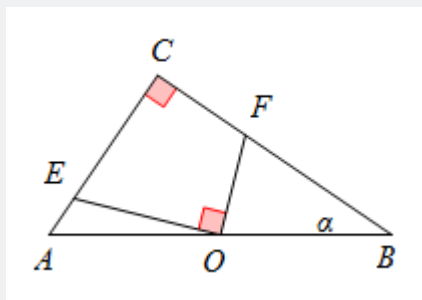
【标注】【知识点】正方形等其他图形的手拉手模型

3. 对角互补模型

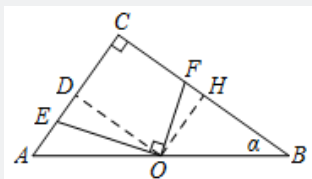


 教法备注

如图，在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，点 O 是 AB 的中点， $\angle EOF = 90^\circ$ ，则 $\frac{OE}{OF} = \frac{BC}{AC}$ 。

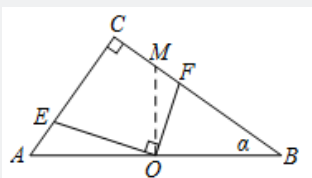


解法一



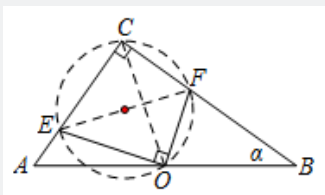
过点 O 作 $OD \perp AC$ 于 D ，
 $OH \perp BC$ 于 H ，
 易证 $\triangle ODE \sim \triangle OHF$ ，
 $\frac{OE}{OF} = \frac{OD}{OH} = \frac{BH}{OH} = \frac{BC}{AC}$ 。

解法二



过点 O 作 $OM \perp AB$ 交 BC 于 M ，
 易证 $\triangle OAE \sim \triangle OMF$ ，
 $\frac{OE}{OF} = \frac{OA}{OM} = \frac{OB}{OM} = \frac{BC}{AC}$ 。

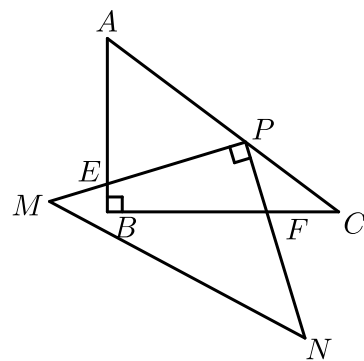
解法三



$\because \angle ECF = \angle EOF = 90^\circ$ ，
 $\therefore C, E, O, F$ 四点在以 EF 为直径的圆上，
 $\therefore \angle OEF = \angle OCF = \angle OBC$ ，
 $\therefore \triangle EOF \sim \triangle BCA$ ，
 $\therefore \frac{OE}{OF} = \frac{BC}{AC}$ 。

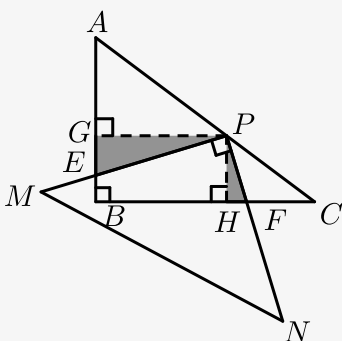
典题精练

28. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $BC = 4$ ，在 $\text{Rt}\triangle MPN$ 中， $\angle MPN = 90^\circ$ ，点 P 在 AC 上， PM 交 AB 于点 E ， PN 交 BC 于点 F ，当 $PE = 2PF$ 时， $AP = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 3

【解析】 如图所示：作 $PG \perp AB$ 于 G ， $PH \perp BC$ 于 H ，



在四边形 $PEBF$ 中， $\because \angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle MPN = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle BEP + \angle BFP = 360^\circ - \angle ABC - \angle MPN$$

$$= 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 180^\circ，$$

又 $\because \angle PEG + \angle PEB = 180^\circ$ ，

$$\therefore \angle PEG = \angle PFH，$$

$$\therefore \triangle PEG \sim \triangle PFH，$$

$$\therefore \frac{PG}{PH} = \frac{PE}{PF} = 2，\text{ 设 } PH = x，\text{ 则 } PG = 2x，$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB = 3$ ， $BC = 4$ ，

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5，$$

$$\therefore AB : BC : AC = 3 : 4 : 5，$$

$$\therefore PG \parallel BC，PH \parallel AB，$$

$$\therefore \triangle AGP \sim \triangle PHC \sim \triangle ABC，$$

$$\therefore AP : GP = AC : BC = 5 : 4，PC : PH = AC : AB = 5 : 3，$$

$$\therefore AP = \frac{5}{4}GP = \frac{5}{4} \times 2x = \frac{5}{2}x，PC = \frac{5}{3}PH = \frac{5}{3}x，$$

$$\therefore AC = AP + PC = \frac{5}{2}x + \frac{5}{3}x = 5，$$

$$\therefore x = \frac{6}{5}，$$

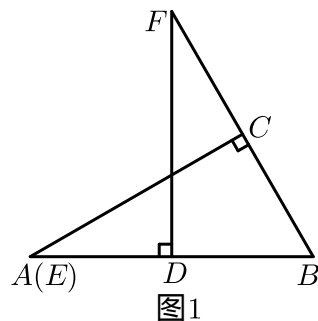
$$\therefore AP = \frac{5}{2}x = \frac{5}{2} \times \frac{6}{5} = 3.$$

【标注】【知识点】旋转类相似

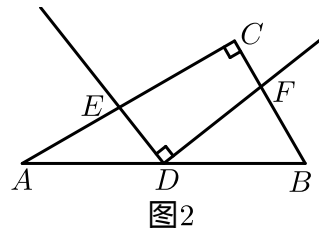
过关斩将

29. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, D 为 AB 的中点, 点 E 在线段 AC 上, 点 F 在直线 BC 上, $\angle EDF = 90^\circ$.

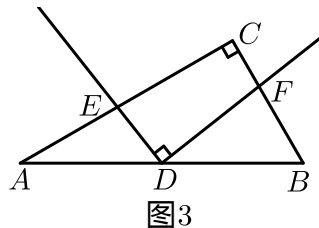
(1) 如图1, 若点 E 与点 A 重合, 点 F 在 BC 的延长线上, 则此时 $\frac{DE}{DF} = \underline{\hspace{2cm}}$.



(2) 若点 E 在线段 AC 上运动, 点 F 在线段 BC 上随之运动 (如图2), 请猜想在此过程中 $\frac{DE}{DF}$ 的值是否发生改变. 若不变, 请求出 $\frac{DE}{DF}$ 的值; 若改变, 请说明理由.



(3) 在 (2) 的条件下, 在线段 EC 上取一点 G , 在线段 CB 的延长线上取一点 H , 其中 $\frac{EG}{FH} = k$, 请问 k 为何值时, 恒有 $\angle GDH = 90^\circ$. 请在图3中补全图形, 直接写出符合题意的 k 值, 并以此为条件, 证明 $\angle GDH = 90^\circ$.



【答案】(1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(2) $\frac{DE}{DF}$ 的值不变, 恒为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(3) $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

【解析】(1) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB = 2BC = 2BD$,

$$\therefore DF = \sqrt{3}BD = \sqrt{3}DE ,$$

$$\therefore \frac{DE}{DF} = \frac{\sqrt{3}}{3} .$$

(2) 猜想: 在此过程中, $\frac{DE}{DF}$ 的值不变.

过点 D 作 $DM \perp AB$ 交 BC 的延长线于点 M .

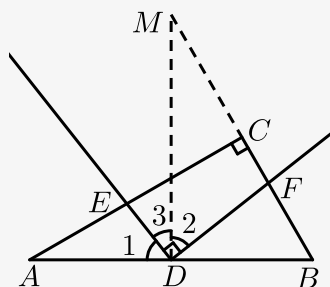


图2

$$\therefore \angle MDA = \angle MDB = 90^\circ , \text{ 即 } \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ ,$$

$$\text{又 } \angle EDF = \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 .$$

$$\therefore \angle ACB = \angle MDB = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle A = 90^\circ - \angle B , \angle M = 90^\circ - \angle B ,$$

$$\therefore \angle A = \angle M$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle MDF ,$$

$$\therefore \frac{DE}{DF} = \frac{DA}{DM} ,$$

$$\therefore D \text{ 为 } AB \text{ 中点} ,$$

$$\therefore DA = DB ,$$

$$\therefore \frac{DA}{DM} = \frac{DB}{DM} = \tan M = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} ,$$

$$\therefore \text{在此过程中, } \frac{DE}{DF} \text{ 的值不变, 恒为 } \frac{\sqrt{3}}{3} .$$

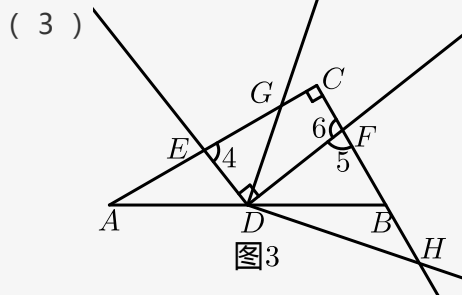


图3

$$\text{由 (2) 得 } \frac{DE}{DF} = \frac{\sqrt{3}}{3} = k = \frac{EG}{FH} ,$$

$$\therefore \text{四边形 } CEDF \text{ 中, } \angle ACB = \angle EDF = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle 4 + \angle 6 = 360^\circ - \angle ACB - \angle EDF = 180^\circ ,$$

$$\text{又 } \angle 5 + \angle 6 = 180^\circ ,$$

$$\therefore \angle 4 = \angle 5 ,$$

$$\begin{aligned}
 &\therefore \triangle EGD \sim \triangle FHD, \\
 &\therefore \angle EDG = \angle FDH, \\
 &\therefore \angle EDF = \angle EDG + \angle FDG = 90^\circ, \\
 &\therefore \angle FDH + \angle FDG = 90^\circ, \\
 &\text{即 } \angle GDH = 90^\circ.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】旋转类相似